9.11.22

$$(e^x)' = e^x$$

$$(3^x) = (e^{\ln 3})^x = e^{(\ln 3)\cdot x}$$

$$(3^x)' = e^{(\ln 3)\cdot x} \cdot (\underbrace{(\ln 3)\cdot x)'}_{\ln 3}$$

$$(3^x)' = \ln 3 \cdot 3^x$$

$$\underline{(1.0986\ldots)\cdot 3^x}$$

$$3^{\sqrt{2x+1}} = e^{(\ln 3)\cdot\sqrt{2x+1}}$$

$$(3^{\sqrt{2x+1}})' = 3^{\sqrt{2x+1}} \cdot (\ln 3 \cdot \sqrt{2x+1})'$$

$$= 3^{\sqrt{2x+1}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot \underbrace{(2x+1)'}_{2}$$

$$= \underline{\frac{\ln 3}{\sqrt{2x+1}} \cdot 3^{\sqrt{2x+1}}}$$

$-$ x^x $\quad x > 0$

$1^1 = 1$

$2^2 = 4$

$3^3 = 27$

$4^4 = 2^8$

$= 256$

$\vdots$

10^{10}

Hva er $(x^x)'$?

Derivert som polynom (fast eksponent):

$$x \cdot x^{x-1} = x^x \quad ?$$

— " — eksponentfunksjon (fast grunntall):

$$\ln x \cdot x^x. \quad ?$$

$$x^x = (\underbrace{e^{\ln x}}_{x})^x = e^{x \ln x}$$

$$(x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)'$$

$$= x^x\Big(\underbrace{(x)'\ln x}_{\ln x} + x(\ln x)'\Big)$$

$$\ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$(x^x)' = \underline{x^x(\ln x + 1)}$$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\qquad (\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \left(\frac{1}{\ln a}\right) \cdot \ln x$

$x = a^{\log_a x} = (\underbrace{e^{\ln a}}_{a})^{\log_a x}$

$x = e^{\ln a \cdot \log_a x}$

$x = e^{\ln x}$ $\qquad$ (e^u økende funksjon)

så $\ln a \cdot \log_a x = \ln x$

Derfor er $\underline{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$

$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'$

$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \underline{\frac{1}{x \cdot \ln a}}$

$x \neq 0$

$g(x) = \log|7/x^2| = \log(7 \cdot x^{-2})$

$= \log 7 + \log(x^{-2})$

$= \log 7 + (-2)\log(x) = \log 7 - 2\frac{\ln x}{\ln 10}$

$g'(x) = \underbrace{(\log 7)'}_{0} - \frac{2}{\ln 10}(\ln x)' = \underline{\frac{-2}{x \ln 10}}$

$$\frac{d}{dx} \ln\left(\sqrt{3x+4}\right)$$

$$= \frac{d}{dx} \ln\left(\left(3x+4\right)^{1/2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx} \frac{1}{2} \ln(3x+4)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(3x+4)\right)' \qquad \left((\ln u)' = \frac{1}{u} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{3x+4} \underbrace{(3x+4)'}_{3} \qquad \text{kjerneregel.}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3x+4}$$

Test Forkurs Matematikk OsloMet
9. november 2022

Oppgave 1. Deriver funksjonene

$$e^{-x+1} \qquad \text{og} \qquad x \cdot 2^{x^2}$$

$e^{-x+1} = e^{u(x)}$, $u(x) = -x+1$

$(e^{-x+1})' = e^{-x+1} \cdot (-x+1) = \underline{\underline{-e^{-x+1}}}$

↓ betyr

$x \cdot 2^{(x^2)}$

ikke $\cancel{x \cdot (2^x)^2}$

Oppgave 2. Deriver funksjonene

$$\ln(x^3) \qquad \text{og} \qquad (x^3+5)\log_2|4x|$$

$= 3\ln(x)$

$(\ln x^3)' = (3\ln x)'$

$= 3(\ln x)' = \underline{\underline{\frac{3}{x}}}$

Oppgave 3. En vare koster $P_0 = 1000$ kroner. Først settes prisen opp med 50% og etter en stund settes prisen ned med 50%. Hva koster varen til slutt?

Oppgave 4. En person har et lån på 100 000 kroner med ågerrenter (urimelige renter) som årlig er 100%. Etter et halvt år betales lånet tilbake sammen med renter. Hvor mye måtte personen betale tilbake?

Kjerneregelen $\quad \left(f(u(x))\right)' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$

Produktregelen $\quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Test LF

1.2 $\quad f(x) = x \cdot 2^{(x^2)}$

$(x)' = 1$

$2^{x^2} = e^{(\ln 2) \cdot x^2}$

$(2^{x^2})' = e^{\ln 2 \cdot x^2} \cdot \underbrace{(\ln 2 \cdot x^2)'}_{(\ln 2) \cdot 2x}$

$(2^{x^2})' = 2 \ln 2 \cdot x \cdot 2^{x^2}$

Produktregelen gir

$(x \cdot 2^{x^2})' = (x)' \cdot 2^{x^2} + x \cdot (2^{x^2})'$

$= 1 \cdot 2^{x^2} + x(2\ln(2) \cdot x) \cdot 2^{x^2}$

$= \underline{(1 + 2\ln(2) \cdot x^2) \cdot 2^{x^2}}$

(benyttet: $1 \cdot a + b \cdot a = (1+b) \cdot a$)

2.2 $$\underbrace{(x^3+5)}_{u}\,\underbrace{\log_2|4x|}_{v} = u\cdot v$$

$$u' = \underline{3x^2}$$

$$v' = \left(\log_2|4x|\right)' = \left(\overbrace{\log_2 4}^{2} + \log_2|x|\right)'$$

$$= \left(\frac{\ln|x|}{\ln 2}\right)' = \left(\frac{1}{\ln 2}\right)\cdot\left(\ln|x|\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{\ln 2}\ln|x|\right)' \;''$$

$$v' = \underline{\frac{1}{(\ln 2)\cdot x}}$$

$$\left((x^3+5)\log_2|4x|\right)'$$

$$= u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$= \underline{3x^2\cdot\log_2|4x| + (x^3+5)\frac{1}{\ln 2\cdot x}}$$

3 $P_0 = 1000$

$$P_1 = \cancel{F00}\ P_0 + 50\% \cdot P_0$$
$$= \left(1+\tfrac{1}{2}\right) P_0$$
$$= 1500$$

$$P_2 = P_1 - 50\% \cdot P_1$$
$$= \left(1-\tfrac{1}{2}\right) P_1 = \tfrac{1}{2} P_1$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot 1500 = \underline{750\text{ kr}}$$

$$P_2 = \left(1-\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{2}\right) P_0$$
$$= \underline{\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right) P_0}$$

Øker prisen med 20% og
så med 30%

Hva øker prisen med?

$$(1.2)(1.3) = (1+0.2)\cdot(1+0.3)$$
$$= 1.56.$$

Prisen øker med <u>56%</u>

Rente på 20%

Renten øker med 10%

$20\% \,(1.1) = 22\%$?

Hvis vi ønsker å ha $20\% + 10\%$
$= 30\%$

kan vi si:

20% økes med 10 prosentpoeng.

100 basispunkt = 1 prosentpoeng.

« styringsrenten økte med 25 bp ».

---

4 $\quad P_0 = 100\,000$ kr

$r_{p.a} = 100\%$

$P(t) = P_t = P_0 e^{kr\, t}$
r kont. rente

$P'(t) = r\, P(t)$

$P(1) = P_0 e^{r}$

$t = 1$ år

$= P_0(1 + r_{p.a})$

$$e^{r} = 1 + r_{p.a}$$

kont. rente

årlig rente.

$$P(\tfrac{1}{2}) = P_0 e^{r \cdot 1/2} = P_0 (e^{r})^{1/2}$$

$$= P_0 \sqrt{e^{r}}$$

$$= P_0 \sqrt{1 + r_{p.a}}$$

Når $r_{p.a} = 100\% = 1$

$$P(\tfrac{1}{2}) = P_0 \sqrt{2}$$

$$\approx \underline{141421 \text{ kr}}$$

Kurvedrøfting

$$f(x) = (x-1)e^{-x} \qquad x \geq 0$$

$$f'(x) = \underbrace{(x-1)'}_{1}\, e^{-x} + (x-1)\underbrace{(e^{-x})'}_{-e^{-x}}$$

$$f'(x) = e^{-x} - (x-1)e^{-x}$$

$$= e^{-x}(1 - x - (-1))$$

$$= \underline{(2-x)e^{-x}}$$

$f(x)$ vokser $[0, 2]$

avtar $[2, \infty\rangle$.

$$f''(x) = ((2-x)e^{-x})'$$

$$= (2-x)'\, e^{-x} + (2-x)(e^{-x})'$$

$$= -1\, e^{-x} - (2-x)e^{-x}$$

$$= (x-3)e^{-x}$$

konkav ned $(0, 3)$

— opp $(3, \infty)$

Toppunkt $(2, e^{-2})$

Vendepunkt $(3, 2e^{-3})$.

For alle n

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$(x^n e^{-x})' = n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}$$
$$= x^{n-1} e^{-x} (n-x)$$

voksen $\quad x \leq n$

avtar $\quad x \geq n$

Toppunkt $\underline{\left(n, \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0$$