

Oppgaver Forkurs Matematikk OsloMet

11. august 2022

Forsøk å løse oppgavene uten bruk av hjelpemiddel

Primtall er heltall større enn eller lik 2 som bare er delelige med seg selv og 1. De første primtallene er

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ...

Alle naturlige tall er et produkt av primtall. Det er et resultat at primtallene som forekommer i primtallsfaktoriseringen og antall ganger de forekommer er bestemt av tallet. Vi sier at positive heltall har entydig primtallsfaktorisering. For eksempel er $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Tallet 1 er produktet av ingen primtall.

Oppgave 1. Faktoriser de følgende naturlige tallene som produkt av primtall

6 30 68 91 256 1000 44100

Oppgave 2. Det finnes uendelig mange primtall. Forsøk å forstå (fylle inn detaljer) i følgende bevis:

Anta at det bare finnes et endelig antall primtall $p_1, p_2, \dots, p_n$. Vis at denne antakelsen leder til en selvmotsigelse siden

$$p_1 p_2 \dots p_n + 1$$

er et tall større enn hvert av primtallene $p_1, p_2, \dots, p_n$, som ikke er delelig med noen av dem. Dette er ikke mulig. Vi konkluderer med at det må være uendelig mange primtall.

To primtall med en differanse lik 2 kalles *tvillingprimtall*. Fra listen ovenfor er 3 og 5, 5 og 7, 11 og 13, 17 og 19, 29 og 31, 41 og 43 tvillingprimtall.

Det er flere enkle spørsmål om primtall vi ikke kjenner svaret til. For eksempel: Finnes det uendelig mange tvillingprimtall?

Et annet slikt spørsmål er Goldbach sin formodning.

Oppgave 3. Addisjon og multiplikasjon er *kommutative*. Det vil si at

$$a + b = b + a \quad \text{og} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

for alle tall a og b . De er også *assosiative*. Det vil si at rekkefølgen to og to tall legges sammen (eller ganges sammen) er likegyldig

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{og} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

for alle tall a, b og c .

På grunn av dette oppgir vi ikke i hvilke rekkefølge to og to tall skal legges sammen. Vi skrive bare $a + b + c + d$ istedenfor for eksempel $((a + b) + c) + d$.

Regneoperasjonene subtraksjon og divisjon er derimot ikke kommutative eller assosiative. Det kan dere observere ved å regne ut følgende:

$$a) \ 2 - 3 \text{ og } 3 - 2 \quad \text{sam} \quad 5 - (3 - 2) \text{ og } (5 - 3) - 2$$

$$a) \ 1/2 \text{ og } 2/1 \quad \text{sam} \quad 2/(5/4) \text{ og } (2/5)/4$$

Vi tenker gjerne på subtraksjon som en addisjon og divisjon som en multiplikasjon

$$a - b = a + (-b) \quad \text{og} \quad a/b = a \cdot (1/b)$$

For eksempel er subtraksjonen $3 - 5$ lik summen av tallene 3 og -5 . Divisjonen $3/5$ er lik produktet av tallene 3 og $1/5 = 0.2$ (en femdel).

Det at addisjon og multiplikasjon er assosiativ lar oss utelate mange parenteser. Vi har noen regnekonvensjoner som lar oss utelate enda flere parenteser i uttrykk. For eksempel er det universell enighet om at $2 \cdot 3 + 5$ tolkes som $(2 \cdot 3) + 5$.

Først regnes parentesene ut, deretter potenser, så multiplikasjon (og divisjon) og til sist addisjon (og subtraksjon).

Et uttrykk som $2 - 3 - 5$ tolkes som addisjonen $2 + (-3) + (-5)$. (Alternativt så utføres addisjon og subtraksjonen fra venstre til høyre.) Her er noen oppgaver hvor dere kan øve på å tolke hva som menes med uttrykkene. Husk at et fortegn kan tolkes som en multiplikasjon $-a = (-1) \cdot a$.

Oppgave 4. Finn tallene lik (regn ut)

$$2 - 3 - 4 + 5 \quad 2 - (3 - 4) + 5 \quad 2 - 3 - (4 + 5)$$

Oppgave 5. Finn heltallene lik (regn ut)

$$a) 3 \cdot 2^2 \text{ og } 32^2 \text{ og } (3 \cdot 2)^2 \quad b) (2 - 3)^3 \text{ og } 2 - 3^3 \quad c) 2 - 3^2 \text{ og } 2 + (-3)^2$$

Oppgave 6. Finn de to heltallene i hver deloppgave (regn ut)

$$a) 2(3 + 4) \text{ og } 2 \cdot 3 + 4 \quad b) (-2)^3 \text{ og } -2^3 \quad c) -3(5 - 2) \text{ og } -3 \cdot 5 - 3 \cdot 2$$

Oppgave 7. Skriv de følgende tallene som en forkortet brøk

$$(2^3)^{-1} \quad 3^8 \cdot 3^5 \cdot 3^{-10} \quad \frac{5^3 \cdot 5^5 \cdot (1/5)}{(5^2)^3} \quad \frac{6^7 \cdot 2^{-5}}{3^8}$$

Oppgave 8. Gang ut parentesene

$$a(b + c) - a(b - c) - a(b + c) - a(b - c)$$

Oppgave 9. Stokk om på de følgende rasjonale tallene slik at de blir ordnet etter størrelse. Det minste tallet skal være lengst til venstre (økende rekkefølge)

$$1/3 \quad 1/2 \quad -3/4 \quad 3/5 \quad 7/11 \quad 0/5 \quad 4/7$$

Her er en mer krevende oppgave.

Oppgave 10. Forklar hvorfor $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall. Det vil si at det er et reelt tall (ligger på tallinjen) men er ikke et rasjonalt tall (forholdstall).

Hint: Forklar at et heltall n er et kvadrat av et annet heltall hvis og bare hvis hvert primtall i primtallfaktorisering til n forekommer et jevnt antall ganger.

Anta at $\sqrt{2} = a/b$. Da er $2b^2 = a^2$. Bruk dette til å vise at $\sqrt{2}$ ikke er et rasjonalt tall (det kan ikke være lik en brøk).

Mer generelt vis at $\sqrt{n}$ enten er et heltall eller et irrasjonalt tall for alle naturlige tall n . Det er et irrasjonalt tall presis når minst ett av primtallene i primtallsfaktoreringen til n forekommer et odde antall ganger.

Avgjør hvilken av tallene

$$\sqrt{7} \quad \sqrt{81} \quad \sqrt{52} \quad \sqrt{1} \quad \sqrt{28}$$

som er heltall og hvilken som er irrasjonale tall.