Oppgaver i forkurs Matematikk, OsloMet
28. september 2022

Den deriverte $f'(x)$ til en funksjon $f(x)$ er stigningstallet til tangenten til $f(x)$ i punktet $(x, f(x))$ på grafen til f. Den deriverte til uttrykket for en linje $ax+b$ er selvsagt a. Den deriverte til x^2 er $(x^2)' = 2x$. Generelt er den deriverte til x^r lik $(x^r)' = rx^{r-1}$ (for alle reelle tall r). Derivasjon har egenskapen at den er lineær. Det vil si at

$$(af(x) + bg(x)) = af'(x) + bg'(x)$$

for a og b (uavhengige av x) og funksjoner $f(x)$ og $g(x)$. For eksempel er den deriverte til $4x^3 - 2x + 5$ lik

$$(4x^3 - 2x + 5)' = 4(x^3)' - 2(x)' + (5)' = 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 1 + 0 = 12x^2 - 2$$

Oppgave 1. Deriver funksjonene

a) $3x-4$ *b)* $-3x^2+4x-9$ *c)* $x(4-5x)$ *d)* $3x/5-x^2/6+\sqrt{3}$ *e)* $(2x+3)(x-5)$

Oppgave 2. Finn stigningstallet til tangentlinjen til

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 5$$

i punktet $(3, f(3))$. Beskriv tangentlinjen ovenfor som en linje $y = ax + b$. Hvor treffer denne linjen x-aksen?

Oppgave 3. Vi benytter funksjonen fra forrige oppgave. For hvert reelt tall t beskriv tangentlinjen i $(t, f(t))$ som en linje $y = ax + b$. Her vil koeffisientene a og b avhengige av t.

Tegn opp grafen til $f(x)$ i Geogebra og lag en slider for t. Tegn inn punktet $(t, f(t)$ og tangentlinjen gjennom dette punktet. Varier t.

Oppgave 4. Utfør oppgave 3 med andre funksjoner enn den fra oppgave 2. For eksempel x^3 , $\sqrt{1+x^2}$, $1/x$ etc.

Benytt at Geogebra finner den deriverte til $f(x)$ ved å skrive

$$\text{Derivative}(f(x))$$

(i engelsk versjon av Geogebra). Tegn opp grafen til $f(x)$ i Geogebra. Tegn inn punktet $(t, f(t)$ og tangentlinjen gjennom dette punktet. Varier t.

Oppgave 5. Deriver funksjonene

a) $x^3 + x^4 + x^5$ *b)* $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 8$ *c)* $x^3(x^3 - 2x + 5)$

d) $\pi x^3 + \sqrt{2}x + 3/5$ *e)* $(x^2 + 3)(x - 4)$ *f)* $x^2 - (x - 2)(x + 2)$

Oppgave 6. Hvis den deriverte er lik 0 så betyr det at tangentlinjen er horisontal. Grafen «flater ut». Dette skjer i topp- og bunnpunkt (hvor den deriverte eksisterer og vi ikke har et endepunkt).

Finn verdiene til x slik at den deriverte til tredjegradspolynomet

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$$

er lik 0. Tegn opp grafen til polynomet i Geogebra og punktene på grafen hvor den deriverte er lik 0. Du skal da få ekstremalpunktene til $f(x)$.

Oppgave 7. Produktet av funksjonene x^m og x^n er lik x^{m+n}. Den deriverte til disse tre funksjonene er

$$(x^m)' = mx^{m-1} \qquad (x^n)' = nx^{n-1} \qquad (x^{m+n})' = (m+n)x^{m+n-1}$$

Vi ser at den deriverte til produktet *ikke* er lik produktet av de deriverte. Relasjonen er derimot gitt ved

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Denne identiteten kalles **produktregelen**. Sjekk at dette faktisk stemmer med funksjonene $f(x) = x^m$ og $g(x) = x^n$.

Oppgave 8. Sammensetningen «først f og så g» er funksjonen hvor vi setter inn verdien $f(x)$ som variabel i funksjonen g. Dette gir en funksjon $g(f(x))$. Det er vanlig å skrive den sammensatte funksjonen som $g \circ f$. Den deriverte til en sammensatt funksjon kan uttrykkes ved hjelp av de deriverte til hver av funksjonene

$$((g \circ f)(x))' = g'(f(x))f'(x)$$

Dette kalles **kjerneregelen** og g kalles den ytre funksjonen og f den indre funksjonen, eller kjernen. For eksempel er den deriverte til $(x^2+3)^5$ gitt ved

$$((x^2+3)^5)' = 5(x^2+3)^{5-1} \cdot (x^2+3)' = 5(x^2+3)^4 \cdot 2x = 10x(x^2+3)^4$$

Den sammensatte funksjonen av først x^n og så x^m er $(x^n)^m = x^{mn}$. Vis at kjerneregelen stemmer i dette tilfellet.

Oppgave 9. Vis, direkte fra definisjonen av den deriverte, at den deriverte til $f(ax+b)$ er lik $af'(ax+b)$. Benytt dette til å derivere funksjonene

$$a)\ (x+3)^5 \qquad b)\ (3x+7)^{12} \qquad c)\ (15-x)^4 \qquad d)\ (4-5x)^3$$

Oppgave 10. Her er en oppgave hvor dere får bruk for å løse en tredjegradslikning. (En av løsningene er et lite heltall.) Finn alle tangentlinjene til fjerdegradspolynomet

$$p(x) = x^4 - 3x^2 + x$$

som er parallelle til linjen $y = -x + 3$. Sjekk ved å tegne grafen i Geogebra.

Oppgave 11. Et generelt tredjegradspolynom er på formen

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Finn verdiene x slik at den deriverte til $p(x)$ er lik 0. Verdiene x avhenger av a, b og c. De er uavhengige av d (som bare forskyver grafen i vertikal retning). For hvilke verdier av a, b og c er det to , ett og ingen punkt på grafen til $p(x)$ hvor den deriverte er lik 0? Tegn gjerne opp grafen til tredjegradspolynomer i Geogebra. Du trenger da 4 slidere. Tegn inn punktene hvor den deriverte er lik 0, og juster verdiene til parametrene a, b, c og d og sjekk at det du kom frem til stemmer.