18 mars 25

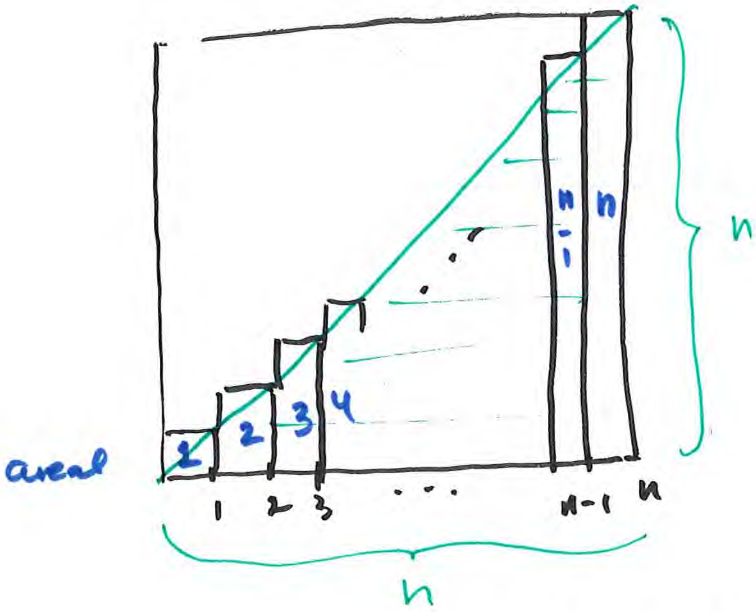
14c

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ følge

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$ rekke

delsum

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



areal til stor trekant er $\frac{n^2}{2}$

n små trekanter med areal $\frac{1}{2}$ hver.

$1+2+3+\cdots+n$ = "arealet under trappen"

$$= \frac{n^2}{2} + n\cdot\frac{1}{2} = \frac{n}{2}(n+1) = \underline{\underline{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

Aritmetisk følge $\qquad a_{n+1} = a_n + d$

$\uparrow$ differansen.

$a_1, \underbrace{a_1+d}_{a_2}, \underbrace{a_1+2d}_{a_3}, \ldots \qquad a_n = (n-1)d + a_1$

$$a_n = (n-1)d + a_1 = nd + \underbrace{(a_1 - d)}_{a_0}$$

$$\underline{a_n = n\cdot d + a_0}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$= (1+2+3+\cdots+n)d + n \cdot a_0$$
$$= \underline{\frac{n(n+1)}{2} d + n \cdot a_0}$$
$$= n\left(\frac{(n+1)}{2} \cdot d + \frac{2a_0}{2}\right)$$

$a_1 = d + a_0$

$a_n = d \cdot n + a_0$

$$= \frac{n}{2}\left((n+1)d + 2a_0\right)$$
$$= \frac{n}{2}\left(\underbrace{(n \cdot d + a_0)}_{a_n} + \underbrace{d + a_0}_{a_1}\right)$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \cdot n$$

S_n = produktet av gjennomsnittet av første og siste ledd med antall ledd i rekken.

eks $\qquad 5 + 7 + 9 + \cdots + 99 \qquad$ aritmetisk rekke.

differansen er 2

$$a_n = 2n + a_0$$
$$a_1 = 5 = 2 \cdot 1 + a_0$$
$$a_0 = 3.$$

$$a_n = 2n + 3.$$
$$a_N = 99 = 2N + 3$$

$$2N = 99 - 3 = 96$$

$$\underline{N = 48} \quad \text{antall ledd.}$$

Summen er

$$S_{48} = \frac{48(49)}{2} \cdot 2 + 48 \cdot 3$$

$$= 48(49+3) = 48 \cdot 52$$

$$\left(\left(= (40+8)(50+2) \quad \text{gange ut} \ldots \right) \right.$$

$$= (50-2)(50+2)$$

$$\left. = 50^2 - 4 = 2500 - 4 = \underline{2496} \right)$$

$$\frac{a_1 + a_{48}}{2} \cdot 48$$

$$= \frac{5 + 99}{2} \cdot 48 = 52 \cdot 48 .$$

Alternativ måte å finne antall ledd

$$a_n = (n-1)d + a_1$$

$$a_n = (n-k)d + a_k$$

$$\underline{a_n - a_k = (n-k)d}$$

Antall ledd: $\underset{a_1}{5} + 7 + 9 + \cdots + \underset{a_N}{99}$

$$\frac{a_N - a_1}{d} = N - 1 \quad \text{så} \quad N = \frac{99-5}{2} + 1$$

$$= 94/2 + 1 = 47 + 1 = \underline{48}$$

oppg. $a_1, \dots, a_n$ aritmetisk følge

$$a_3 = -2 \quad \text{og} \quad a_9 = 8$$

Finn a_n

$$a_n = d \cdot n + a_0$$

$$a_3 = d \cdot 3 + a_0$$

$$a_9 = d \cdot 9 + a_0$$

$$a_9 - a_3 = d(9-3)$$

$$d = \frac{a_9 - a_3}{9-3} = \frac{8-(-2)}{6}$$

$$d = \frac{10}{6} = \underline{\frac{5}{3}}$$

$$a_0 = a_3 - 3 \cdot d$$

$$= -2 - 3 \cdot \frac{5}{3} = -2 - 5 = \underline{\underline{-7}}$$

$$a_n = \frac{5}{3} \cdot n - 7$$

Hvor mange ledd har rekken

$$a_{20} + a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{50} \; ?$$

a_{20}

$$50 - 20 + 1 = \underline{31}$$

(tenk på : $a_1 + a_2$
har $(2-1)+1 = 2$ ledd)

Eksempler.

Eks. oppg 24

En rekke $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ har
(del)sum $S_n = 2n^2 - 4$ $\quad n \geq 1$

- Bestem a_n $\quad n \geq 1$
- Er rekken aritmetisk ?

$$\overbrace{\underbrace{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + a_n}^{S_n}$$

$$S_{n-1} + a_n = S_n$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - 4 - \left(2(n-1)^2 - 4\right) \\ &= 2\big(n^2 - \underbrace{(n-1)^2}_{n^2-2n+1}\big) = 2(2n-1) \end{aligned}$$

$$\underline{a_n = 4n - 2}$$

Dette er en aritmetisk rekke med differanse 4.

eks 24 aritmetisk rekke

$a_1 + a_2 + \cdots$

summen av de 10 første leddene er lik 100

summen av de neste 10 leddene er lik 400.

Bestem differansen d og første ledd a_1. Finn a_n.

$$S_{10} = a_1 + \cdots + a_{10} = 100$$

$$a_{11} + \cdots + a_{20} = 400$$

$$S_{20} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 100 + 400 = 500$$

Vi benytter at $S_n = \frac{n(n+1)}{2} d + n \cdot a_0$

hvor $a_n = dn + a_0$

Likning

$$S_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2} d + 10 a_0 = 100 \quad \text{I}$$

$$2 S_{10} = 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} d + 20 a_0 = 200$$

$$S_{20} = \frac{20 \cdot 21}{2} d + 20 a_0 = 500 \quad \text{II}$$

$L\text{II} - 2L\text{I}$:

$$-\left(2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} d + 20 a_0\right) + \frac{20 \cdot 21}{2} d + 20 a_0 = 500 - 200$$

$$10 \cdot 21d - 10 \cdot 11d = 300$$

$$10(21-11)d = 300$$

$$100d = 300$$

$$\underline{d = 3}$$

$$S_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2} \cdot 3 + 10a_0 = 100$$

$$5 \cdot 3 \cdot 11 + 10a_0 = 100$$

$$10a_0 = 100 - \underbrace{15 \cdot 11}_{150+15}$$

$$= 100 - 165$$

$$10a_0 = -65$$

$$a_0 = \frac{-65}{10} = \underline{-6,5}$$

$$\underline{a_n = 3n - 6.5}$$

$$a_1 = 3 \cdot 1 - 6.5 = \underline{-3.5}$$

Eksamens oppg. 23

Regn ut summen av alle hele tall mellom 200 og 500 som er delelige med 6.

$30 \cdot 6 = 180$ $\quad$ $80 \cdot 6 = 480$

$4 \cdot 6 = 24$ $\quad$ $3 \cdot 6 = 18$

$34 \cdot 6 = 204$ $\quad$ $83 \cdot 6 = 498$

første ledd $\quad$ siste ledd.

(alternativt $\frac{200}{6} = 33.33\ldots$)

$\frac{500}{6} = 83.33\ldots$

$$6(\underbrace{34 + 35 + \cdots + 83}_{\text{antall ledd er lik}})$$

$$83 - 34 + 1 = 83 - 33$$
$$= \underline{50}$$

summen er lik:

skrev først minus, det skal være pluss. !

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_n) \cdot n = \frac{1}{2} \, 6(83 + 34) \cdot 50$$
$$= 3(83 + 34) \cdot 50 = 150 \cdot 117$$
$$= 15000 + 1500 + 1050 = \underline{17550}$$
$$\cancel{= 3 \cdot 49 \cdot 50}$$
$$\cancel{= 3(50 - 1)50}$$
$$\cancel{= 3(2500 - 50)} = 3(2450)$$
$$\cancel{= 7500 - 150 = \underline{7350}}$$

(Dette er mistenkelig likt.)

summen er lik $\underline{17550}$