25 mars
25

14D Vendelige rekker

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n}_{} + \cdots$$

summen av de n første leddene kalles n-te delsum s_n.

Rekken konvergerer hvis følgen av delsummer konvergerer $s_n \to s$ når $n \to \infty$

"Den vendelige rekken konvergerer til s"
"s er summen til rekken".

Eks. $a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \cdots$ geometrisk

$a_1(1 + k + k^2 + \cdots)$

- konvergerer når $|k| < 1$
  summen er da lik $a_1 \frac{1}{1-k}$.
- divergerer når $|k| \geq 1$.

(n-te delsum $s_n = a_1 \begin{cases} \frac{1-k^n}{1-k} & k \neq 1 \\ n & k = 1 \end{cases}$)

* $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}$

geometrisk

* $3 - \frac{3}{8} + \frac{3}{64} - \frac{3}{512} + -$

geometrisk

$= 3\left(1 + \left(\frac{-1}{8}\right) + \left(\frac{-1}{8}\right)^2 + \left(\frac{-1}{8}\right)^3 + \cdots\right)$

$= 3 \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{-1}{8}\right)} = 3 \cdot \frac{1}{9/8} = \frac{3 \cdot 8}{9} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$

* $-\frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \cdots$

geometrisk

$= \frac{-1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right)$

$= \frac{-1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = -1 \frac{1}{4-1} = \underline{\underline{\frac{-1}{3}}}$

Resultat. Hvis $a_1 + a_2 + \cdots$ konvergerer, så må $a_n \to 0$ når $n \to \infty$

$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$ når $n \to \infty$

Det motsatte er ikke gyldig

$a_n \to 0$ selv om rekken divergerer.

Eks $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\geq$ antall ledd $\cdot$ verdien til minste ledd

$n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ når $n \to \infty$

men rekken divergerer, siden $s_n \geq \sqrt{n}$.

n-te delsum.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ benytter dette

$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$

Så $s_n \to 1$ når $n \to \infty$

Rekken konvergerer til 1.

(dette gir at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer og har sum mellom 1 og 2)

Harmonisk rekke

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

divergerer.

$$\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 2^m}}_{2^m \text{ ledd}}$$

minste ledd er $\frac{1}{2^{m+1}}$

$$\geq 2^m \cdot \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{m=0} + \underset{m=1}{\left(\frac{1}{3} + \overset{\frac{1}{2^{m+1}}}{\frac{1}{4}}\right)} + \underset{m=2}{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \overset{\frac{1}{2^{m+1}}}{\frac{1}{8}}\right)}$$

$$+ \cdots$$

Endelig delsum

$$S_{2^m} = \sum_{n=1}^{2^m} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} m$$

så $S_{2^m} \to \infty$ når $m \to \infty$.

$$\underbrace{1 + 1 \cdot m}_{m+1} \geq \sum_{n=1}^{2^m} \frac{1}{n}$$

$$1024 = 2^{10}$$

$$10^9 < (1024)^3 = 2^{30}.$$

$$\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{2^{30}} \frac{1}{n} \leq 1 + 30 = \underline{31}$$

Resultat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergerer når $s > 1$

Potensrekker.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

n-te delsummer $S_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$
polynom i x av grad $\leq n-1$.

Resultat Det finnes en $R \geq 0$
slik at potensrekken $f(x)$ konvergere for $|x| < R$
divergere for $|x| > R$

($|x| = R$? Konvergens avhenger av rekken)

R kalles konvergensradius til potensrekken.

Eks. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$
konvergerer når $|x| < 1$
divergerer når $|x| > 1$
(og når $|x| = 1$)

Erstatter x med $-x^2$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - + \cdots$$

konvergerer $|-x^2| < 1$

$\Leftrightarrow \quad |x| < 1$

$$\frac{x}{2+x} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + - \cdots\right)$$

konvergerer når $\left|\left(-\frac{x}{2}\right)\right| < 1$

$|x| < 2$

$$\frac{1}{1-\sin x} = 1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \cdots$$

konvergerer når $|\sin x| < 1$

divergerer når $\sin x = \pm 1$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots$$

geometrisk rekke med variabel kvotient $1-x$.

konvergerer når $|1-x| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

divergerer når $|1-x| \geq 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

a) Når konvergerer rekken?

b) Når er summen lik 3.

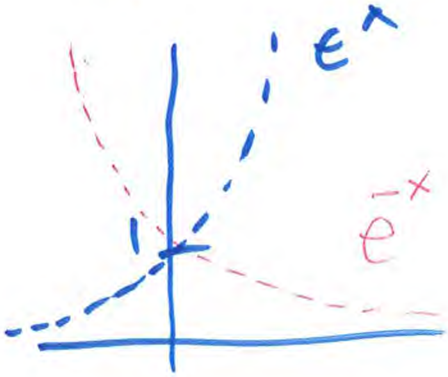
$$e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots$$
$$= e^{-x} + (e^{-x})^2 + (e^{-x})^3 + \dots$$

geometrisk rekke m. variabel kvotient $a_n = (e^{-x})^n$.

a) Konvergerer $|e^{-x}| < 1$

$e^{-x} < 1$

$\Leftrightarrow \underline{x > 0}$



b) $S = e^{-x} \cdot \dfrac{1}{1-e^{-x}} = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \cdot \dfrac{e^x}{e^x}$

$$= \underline{\frac{1}{e^x - 1}}$$

summen er lik 3 når $\dfrac{1}{e^x - 1} = 3$

$e^x - 1 = \frac{1}{3}$ så $e^x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 0$

$$\underline{x = \ln(4/3)}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1-\sin^2 x}$$

(geometrisk rekke m variabel
kvotient lik $\sin^2 x$)

$$= 1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \cdots$$

konvergerer : $|\sin x| < 1$

(Til opplysning:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - + \cdots \qquad \text{alle } x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - + \cdots$$

Eksempel på Taylor rekker

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

når potensrekke konvergerer

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots n$$

$$0! = 1$$

$f^{(n)}(x)$ = n-te derivert til $f(x)$.)

kont. eks 22

$$x^2 + (x^2-1) + \frac{(x^2-1)^2}{x^2} + \dots$$

geometrisk

a) Konvergensintervall.

b) Når er summen lik 4.

$$x^2\left(1 + \frac{x^2-1}{x^2} + \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^2 + \dots\right)$$

Kvotienten er $\frac{x^2-1}{x^2}$.

a) Konvergerer når $\left|\frac{x^2-1}{x^2}\right| < 1$.

$x^2 > 1$: $\frac{x^2-1}{x^2} < 1$: $1 - \frac{1}{x^2} < 1$ ✓

$x^2 \le 1$ $\quad \frac{1-x^2}{x^2} < 1 \quad | \cdot x^2 > 0$

$$1 - x^2 < x^2 \iff 1 < 2x^2 \iff \frac{1}{2} < x^2$$

Konvergerer $\underline{\left\langle -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \infty \right\rangle}$

b) $x^2 \frac{1}{1 - \frac{x^2-1}{x^2}} = x^2 \cdot \frac{x^2}{x^2-(x^2-1)}$

$$= \frac{x^4}{1} = \underline{x^4}$$

summen er lik 4 når $x^4 = 4$

$$x = \pm\sqrt[4]{4} = \pm\, 4^{1/4} = \pm(2^2)^{1/4}$$

$$x = \underline{\pm\sqrt{2}}$$