Integrasjonsoppgaver april 2025

Løsningsforslag

1

Finn de ubestemte integralene.

$$a) \int 3\sqrt{4x+5}\,dx \qquad b) \int 3x\sqrt{4x+5}\,dx \qquad c) \int \frac{2x}{3+x^2}\,dx$$

LF: Vi benytter substitusjon med $u = 4x+5$ og får

$$a) \int 3\sqrt{4x+5}\,dx = 3\int \sqrt{u}\,\frac{1}{4}du = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \underline{\frac{1}{2}(4x+5)^{3/2} + C}$$

Vi benytter samme substitusjon som i a) og benytter at $x = (u-5)/4$.

$$b) \int 3x\sqrt{4x+5}\,dx = 3\int \frac{u-5}{4}\sqrt{u}\,\frac{1}{4}du = \frac{3}{4^2}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - 5\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C =$$

$$\underline{\frac{3}{40}(4x+5)^{5/2} - \frac{5}{8}(4x+5)^{3/2} + C}$$

Vi benytter substitusjonen $u = x^2+3$. Da er $du = 2xdx$.

$$c) \int \frac{2x}{3+x^2}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \underline{\ln|x^2+3| + C}$$

2

Finn de ubestemte integralene.

$$a) \int \frac{x^3-3}{x^2-4}\,dx \qquad b) \int x\cos(2x-5)\,dx \qquad c) \int \frac{x^5}{e^{3x+1}}\,dx$$

LF: a) Vi utfører polynomdivisjon og deretter delbrøksoppspalting og får

$$\frac{x^3-3}{x^2-4} = x + \frac{4x-3}{x^2-4} = x + \frac{4x-3}{(x-2)(x+2)} = x + \frac{1}{4}\left(\frac{11}{x+2} + \frac{5}{x-2}\right)$$

Lineær substitusjon gir det ubestemte integralet

$$\int \frac{x^3-3}{x^2-4}\,dx = \int x + \frac{1}{4}\left(\frac{11}{x+2} + \frac{5}{x-2}\right)\,dx = \underline{\frac{x^2}{2} + \frac{11}{4}\ln|x+2| + \frac{5}{4}\ln|x-2| + C}$$

b) Vi benytter delvis integrasjon og en lineær substitusjon.

$$\int x\cos(2x-5)\,dx = x\sin(2x-5)/2 - \int \sin(2x-5)/2\,dx =$$

$$x\sin(2x-5)/2-(-\cos(2x-5)/2)/2+C=\underline{\frac{2x\sin(2x-5)+\cos(2x-5)}{4}+C}$$

c) Vi benytter substitusjon med $u=-3x^2$. Da er $u'=-6x$.

$$\int \frac{x^5}{e^{3x^2+1}}\,dx=\int \frac{1}{e}x^5e^{-3x^2}\,dx=\int \frac{-1}{6e}x^4e^{-3x^2}\,(-6x)dx=\int \frac{-1}{6e}\frac{u^2}{9}e^u\,du$$

Vi utfører nå delvis integrasjon to ganger.

$$\frac{-1}{54e}\left(u^2e^u-\int 2ue^u\,du\right)=\frac{-1}{54e}\left(u^2e^u-2ue^u+\int 2e^u\,du\right)=$$

$$\frac{-1}{54e}\left(u^2e^u-2ue^u+2e^u+C\right)=\underline{\frac{-e^{-3x^2}}{54e}\left(9x^4+6x^2+2\right)}$$

3

Vis at hvis $f(x)$ er en odde funksjon, $f(-x)=-f(x)$, da er

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$$

for alle a slik at $f(x)$ er definert i intervallet $[-a,a]$.

LF: Funksjonen er odde så det er like store areal over x-aksen som under x-aksen for en symmetrisk intervall $[-a,a]$. De kanselerer hverandre så integralet er lik 0. Her er et mer formelt bevis hvor vi splitter opp integralet i to integraler over $[-a,0]$ og $[0,a]$ og benytter substitusjonen $u=-x$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=\int_{a}^{0} f(-x)\,(-1)dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$=-\int_{0}^{a}(-f(x))\,(-1)dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=0$$

4

Finn de bestemte integralene

$$a)\ \int_0^{1/2} e^{-2x+1}\,dx \qquad b)\ \int_{-2}^{2}\sin^{1/3}(x)\,dx \qquad c)\ \int_0^3 (1+x^2/3)^2\,dx$$

LF: Vi benytter substitusjonen $u=-2x+1$. Vi har $du=-2dx$, $u(0)=1$ og $u(1/2)=0$. Vi får da

$$a)\ \int_0^{1/2} e^{-2x+1}\,dx=\int_1^0 e^u\,\frac{1}{-2}du=\frac{1}{2}\int_0^1 e^u\,du=\frac{e^u}{2}\bigg|_0^1=\underline{\frac{e-1}{2}}$$

Integralet i b) er lik 0 siden integranden $\sin^{1/3}$ er en odde funksjon og vi integrerer over intervallet $[-2, 2]$.

Vi ganger ut parentesen og finner en antideriverte.

$$c)\ \int_0^3 (1 + x^2/3)^2\, dx = \int_0^3 1 + 2x^2/3 + x^4/9\, dx = \left(x + \frac{2x^3}{9} + \frac{x^5}{45}\right) + C\Big|_0^3 =$$

$$3 + 6 + \frac{27}{5} = \underline{\frac{72}{5}}$$

5

a) Vis at for alle $n \geq 1$ så er

$$\int_{-1}^0 (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})\, dx = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

b)* Vis at den uendelige rekken

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

konvergerer til $\ln(2) \cong 0.693147180\ldots$.

LF: Integrasjon er lineær så

$$\int_{-1}^0 (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^0 x^{i-1}\, dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i}\Big|_{-1}^0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

Vi kaller denne delsummen S_n.

Siden

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

så er

$$S_n = \int_{-1}^0 \frac{1}{1-x}\, dx - \int_{-1}^0 \frac{x^n}{1-x}\, dx$$

Det første av de to integralene er lik

$$-\ln|1-x|\Big|_{-1}^0 = \ln(2)$$

I intervallet $[-1, 0]$ er $x^n/(1-x)$ større enn eller lik 0 når n er jevn og mindre enn eller lik 0 når n er odde. Siden $1/2 \leq 1/(1-x) \leq 1$ og

$$\int_{-1}^0 x^n\, dx = (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

så følger det at

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq (-1)^n(\ln(2) - S_n) \leq \frac{1}{n+1}$$

Derfor er grensen

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \ln(2)$$