

Oppgaver Fork1120 - Matematikk forkurs OsloMet
Antall oppgaver: 12

1

Bestem de ubestemte integralene. Deriver gjerne en representant for det ubestemte integralet for å sjekke svaret.

a) $\int (x^2 + 3)^2 dx$

b) $\int x(x^2 + 3)^3 dx$

c) $\int \frac{x^2 + 3x - 1}{x} dx$

d) $\int (2x + 1) \sin(4x) dx$

e) $\int 4x^2 e^{-3x} dx$

f) $\int \frac{x}{5x - 1} dx$

g) $\int \frac{1}{3 - x^2} dx$

h) $\int \cos^3(2x + 1) dx$

i) $\int \sin(2 \cos(x)) \sin(x) dx$

2

Vis at den deriverte til $\arcsin(x)$ er lik $1/\sqrt{1 - x^2}$.

Vis at følgende bestemte integral er lik π

$$I = 6 \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \pi$$

Benytt Simpsons metode med henholdsvis 1, 2 og 3 doble intervaller til å estimere integralet. Hvor nøyaktig blir tilnærmingene til π ?

3

Finn de bestemte integralene

a) $\int_0^2 x e^{-x^2} dx$

b) $\int_{-2}^2 \sin^5(2x) + \cos(\pi x/2) dx$

c) $\int_0^3 x \cos(\pi x) dx$

d) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

4

Finn arealet mellom x -aksen og grafen til funksjonen

$$f(x) = (x - 2)(x + 3)x$$

Dette vil si summen av arealet til de delene mellom grafen til f og x -aksen som er begrensa.

5

Bestem volumet til legemet som fremkommer ved å rotere grafen til $g(x) = \sin(x)$ fra $x = 0$ til $x = \pi$.

6

En vase er konstruert som rotasjonslegemet til området begrenset av grafen til $\sqrt{x+2}$ og $\sqrt{x-1}$ (og null for $x \leq 1$) fra $x = 0$ til $x = 5$. Regn ut volumet til vasen når enhetene er dm. (Tegn gjerne opp grafene til funksjonene.)

7

Bestem periode, jamvekslinje, forskyvning og amplitude til de harmoniske svingningene (sinusfunksjonene)

a) $2 - 3\sin(4x - 3)$ b) $\sin(x) + \cos(x)$ c) $\cos^2(\pi x)$

Se gjerne 11 D i boken.

De følgende oppgavene er for dem som vil ha litt ekstra utfordring.

8

Bestem følgende integraler

$$a) \int \frac{1}{x^2 + 6x + 13} dx \quad b) \int \frac{3x - 4}{(x - 2)(x - 1)(x + 2)}$$

9

Vis at den største verdien til

$$f(x) = \frac{x^n}{e^x} \quad x \geq 0$$

er $(n/e)^n$. For eksempel hvis $n = 10$, så er dette tilnærmet lik 453999. Vis at når x blir stor nok så vil $f(x)$ gå mot 0. "Ekspontenfunksjonen vokser raskere enn ethvert polynom."

10

a) Vis at for alle $n \geq 1$ så er

$$\int_{-1}^0 (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) dx = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

b)* Vis at den uendelige rekken

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

konvergerer til $\ln(2) \cong 0.693147180\dots$

Hint: $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = (1 - x^n)/(1 - x)$ for $-1 < x < 1$.

11

a) Vis at integralet

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx$$

er lik $1/(s - 1)$ når $s > 1$, og at integralet ikke eksisterer når $s \leq 1$.

b) Vis at rekken

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergerer hvis og bare hvis $s > 1$.

12

Stirlings formel sier at forholdet mellom $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ og $\sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ går mot 1 når n blir stor. Dette er et viktig estimat som benyttes mye i matematikk og fysikk. Vi skal her lage estimat basert på integralet av $\ln(x)$.

a) Vis at

$$I_n = \int_1^n \ln(x) dx = n \ln(n) - n + 1$$

b) Vis at trapesmetoden gir estimatet

$$\ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n-1) + \frac{1}{2} \ln(n) = \ln(n!) - \frac{1}{2} \ln(n)$$

for integralet i a). Vis at dette er et nedre estimat.

c) Vis at det nedre estimatet for integralet gir ulikheten

$$n! \leq \sqrt{n}(n/e)^n e$$

d) Feilestimatet for trapesmetoden (gitt i forelesningen om numerisk integrasjon) gir at differansen mellom integralet I_n og estimatet gitt ved trapesmetoden er mindre enn (den dobbelderiverte til $\ln(x)$ er lik $-1/x^2$)

$$\frac{1}{12} \left(\frac{1}{1^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} \right) < (\pi^2/72)$$

Derfor er

$$n! \geq \sqrt{n}(n/e)^n e^{1-\pi^2/72}$$

Her de numeriske verdiene for

$$e > \sqrt{2\pi} > e^{1-\pi^2/72}$$

$$2.71828 \dots > 2.5066 > 2.3700$$