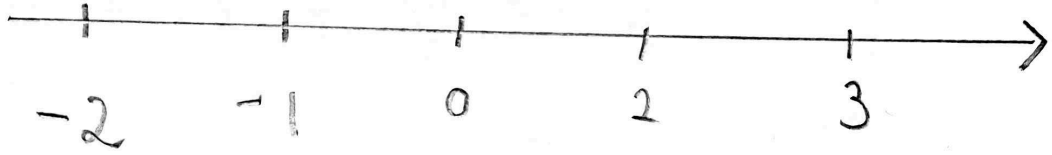
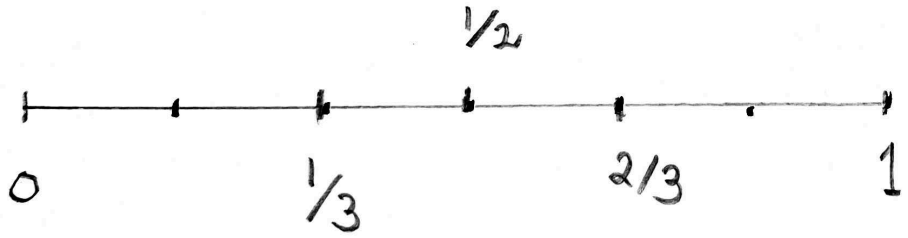
24.08
26

De reelle tallene $\mathbb{R}$



Utvider de rasjonale tallene (forholdstall) $\mathbb{Q}$ til de reelle tallene, slik at de svarer til punkter på tallinjen.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2}$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

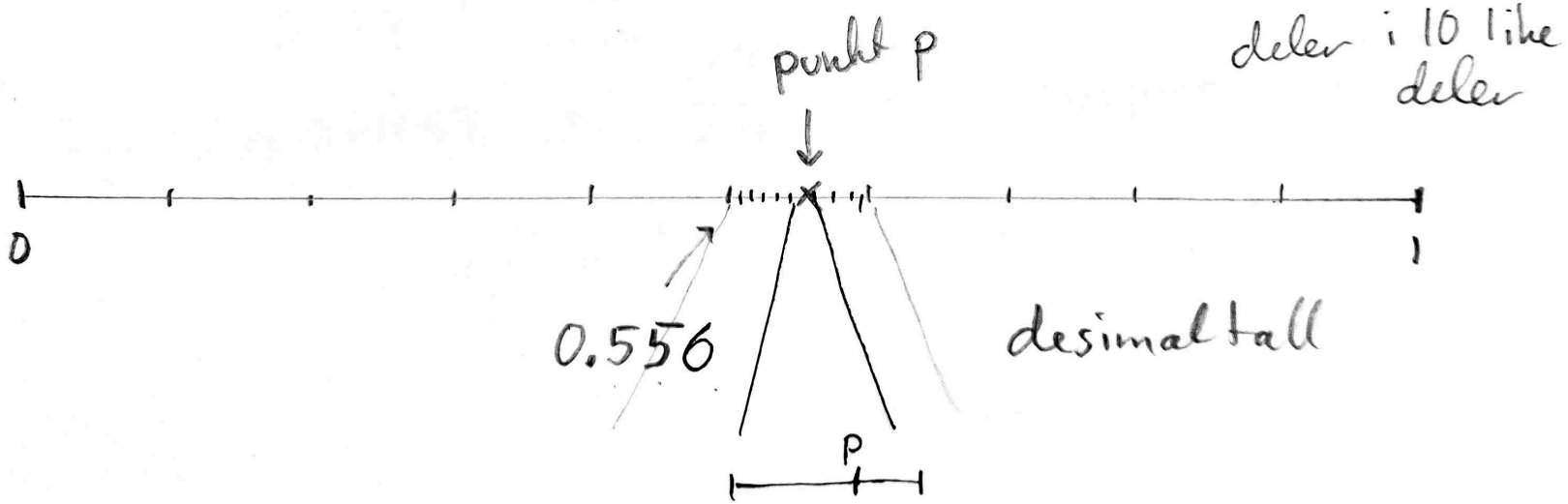
$$3 + \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{12+1}{4} = \frac{13}{4}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$4 \cdot \frac{3}{7} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{7}.$$

Vi viste fordelingen av tallene $\frac{p}{q}$ for $1 \leq q \leq 25$, $1 \leq p \leq q$

i geogebra.



tidele hundredeler tusendeler

$0.a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$ uendelig følge av tall

tusendele $0 \le a_i \le 9$

$$= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \cdots$$

$0.a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ (de resterende desimalene er lik 0) } endelige desimaltall er rasjonale

$= \dfrac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}{10^n}$ ← heltall

rasjonalt tall

$$0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} \quad (\text{forkorter med } 125 = 5^3)$$

eks

$$0.371189 = \frac{371189}{10^6}$$ rasjonalt tall.

Vi utvider sum og produkt fra rasjonale tall til reelle tall.

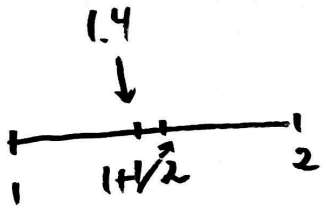
(ved kontinuitet)

Ikkje alle reelle tall er rasjonale.

For eksempel er det et reelt tall $\sqrt{2}$ slik at

$$\sqrt{2}^2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2,$$

og $\sqrt{2}$ er ikke et rasjonalt tall.



$1.5^2 = 2.25 > 2$

$1.4^2 = 1.96 < 2$

$\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$

Anta $\sqrt{2}$ er et rasjonalt tall.

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$ kvadrerer begge sider (av likhetstegnet)

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$ ganger opp med n^2

$$2n^2 = \underbrace{m^2}_{\text{jevnt antall faktorer av 2}}$$

Antall faktorer av 2 i primtallfaktorisering.

odde antall faktorer av 2

Dette gir en motsigelse av entydig primtallsfaktorisering. Derfor er antagelsen gal.

Så $\sqrt{2}$ er et reelt tall som ikkje er rasjonalt.

Reelle tall som ikkje er rasjonale kalles <u>irrasjonale</u> tall.

$\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

Andre eksempler er: $\pi = 3.14\ldots$

$\sqrt{n}$ irrasjonalt for naturlige tall som ikkje er kvadrattall.

(tilsvarende argument som ovenfor for $\sqrt{2}$)

$0.999\ldots = 1$

alle desimalene er lik 9

(ulike) to desimalekspansjoner kan beskrive det samme reelle tallet.

(differansen mellom 1 og 0.999... er lik 0)

$1 - 0.9 = 0.1 = \frac{1}{10}$

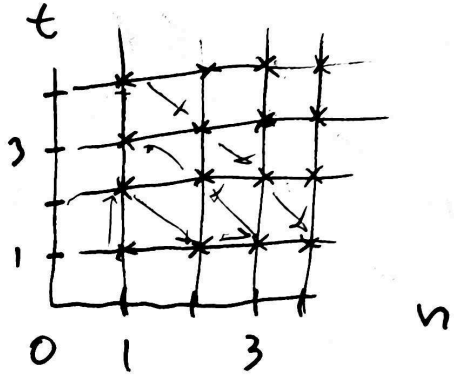
$1 - 0.99 = 0.01 = \frac{1}{10^2}$

$\vdots$

$1 - \underbrace{0.99\ldots9}_{n} = 0.\overbrace{000\ 1}^{n \text{ desimale}} = \frac{1}{10^n}$.

bare 9-ere
↓
$0.873999\ldots = 0.874$

$\mathbb{Q}_+$ er tellbar



$\frac{t}{n}$ representerer alle positive rasjonale tall.

$\mathbb{R}$ er ikkje tellbar

n-te desimalet
↓
$r_{1,n}$

Anta vi kan telle opp alle reelle tall mellom 0 og 1

$r_1 = 0, r_{1,1}\ r_{1,2}\ r_{1,3}\ r_{1,4}\ \ldots$

$r_2 = 0, r_{2,1}\ r_{2,2}\ r_{2,3}, \ldots$

$r_3 = \cdot\ \cdot$

$r_4 = \cdot\ -$

$\vdots$

Vi lager oss et tall r med n-te desimal lik

$r_{n,n} + 1$ hvis $r_{n,n} < 5$

$r_{n,n} - 1$ hvis $r_{n,n} \geq 5$

(dette kan gjøres på mange andre måter)

Da vil r være ulik r_n for alle $n \geq 1$.
Dette motsier at $r_1, r_2, \ldots$ er alle de reelle tallene mellom 0 og 1.

Konklusjon: Vi kan ikke telle opp de reelle tallene.

Delmengder av $\mathbb{R}$ — 1A i boken.

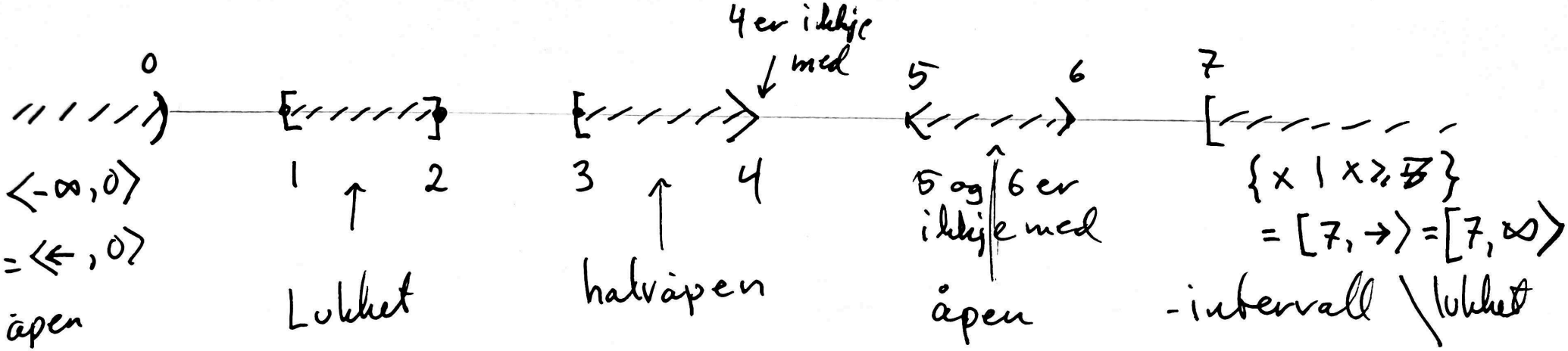
$\{1, 3, 7, 11\}$ mengden av tallene 1, 3, 7 og 11

$[1, 2]$ mengden av reelle tall x slik at $1 \leq x \leq 2$

$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ slik at — lukket intervall

$\langle a, b \rangle = (a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ — åpen intervall

$[a, b\rangle = [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ — halvåpen intervall



A, B delmengder (av $\mathbb{R}$)

Union

"cup"

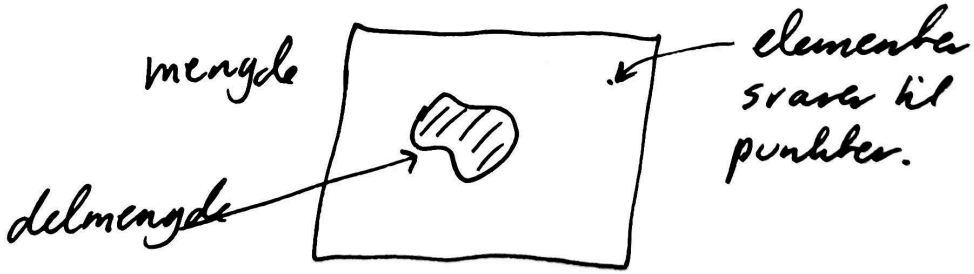
unionen $A \cup B$ kombinasjonen av elementene i A og B

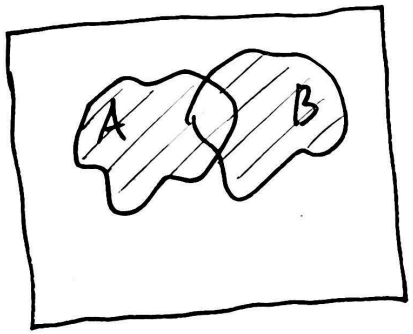
$x \in A$

element i A

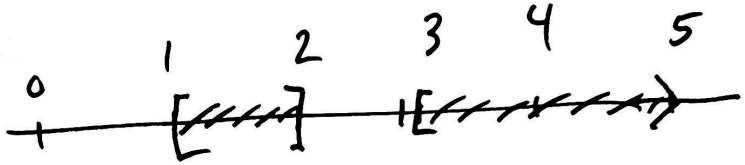
$x \in A \cup B$ svarer til $x \in A$ eller $x \in B$ (eller begge)

Venn diagram





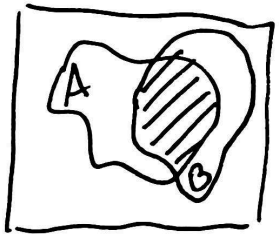
Unionen er kombinasjonen

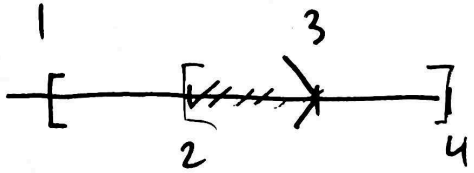


$[1,2] \cup [3,5\rangle$

$A \cap B = \{x \mid x \text{ er i både } A \text{ og } B\}$

Snitt
"cap"





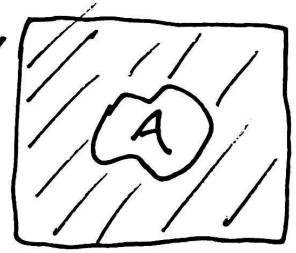
$[1,3\rangle \cap [2,4] = \underline{[2,3\rangle}$

$[1,2] \cap [2,4] = \{2\} = [2,2]$

$(1,2) \cap (2,4) = \underline{\emptyset}$ Mengde med ingen elementer

tomm mengde

Komplement



$X - A = X \setminus A = \{ x \in X \mid x \notin A \}$

De irrasjonale tallene $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$(X - A) \cap (X - B) = X - (A \cup B)$ (hvorfor... ?)

$x \geq 2$ x større enn eller lik 2
$2 \leq x$ 2 mindre enn eller lik x } $[2, \infty\rangle$

$x > 2$ x større enn 2
$2 < x$ 2 mindre enn x } $\langle 2, \infty\rangle$

vi kan presisere:

$\geq$ større enn eller lik
$>$ eller større enn

$\{1,2,3\}$

multiplikative inverse $\frac{1}{n}$ til $n \neq 0$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\subset \mathbb{C}$

$\mathbb{Z}$: Utvider med 0 og negative tall

$\mathbb{R}$: "Fyller ut tallinjen"

$\mathbb{C}$: utvider med i slik at $i^2 = -1$

$\mathbb{N}$: naturlige tall

$\mathbb{Z}$: heltall

$\mathbb{Q}$: rasjonale tall

$\mathbb{R}$: reelle tall

$\mathbb{C}$: (kompleks tall)