2 sep
26

Andregrads likninger

bøker 3D og 4B

$a \neq 0$
$a, b, c \in \mathbb{R}$
parametre
x variabel

2-grads uttrykk
Kvadratiske uttrykk

$a x^2 + b x + c$

$x^2 - x + 12$, $-3x^2 + \pi$ $(b = 0)$, $-x^2 + \frac{4}{5}x$ $(c = 0)$

$a = 0$ reduseres til $bx + c$, et lineært uttrykk.

Andregrads likning.
2. likning
Kvadratisk likning

$$a x^2 + b x + c = 0$$

$4x^2 - 3x + 1 = 0$

$3x^2 - x = 2x^2 + 3x - 7 \iff x^2 - 4x + 7 = 0$

$4x^2 = 3x - 1$

$x^2 - x = x(x+2) \; (= x^2 + 2x) \iff 0 = 3x$ 1.grads likning.

$a \neq 0$ $\qquad ax^2 + bx + c = 0$ $\qquad$ ganger med $\frac{1}{a}$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

ledende koeffisient er 1.

$(x-1)(2x+3) = 0$ $\qquad$ ($\vee$: eller, $\wedge$: og)

ganger ut: $\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2x + 3x - 3 = 0$

$\Updownarrow$

$2x^2 + x - 3 = 0$

Vi benytter $\quad a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ eller $b = 0$

$2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x+3) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee 2x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 1$ eller $\vee \quad x = -3/2$

Løsningene er $\quad \underline{x = 1 \text{ og } x = -3/2}$.

Løsningsmengden er $\quad \{-3/2, 1\}$.

Tilfellet
hvor $c=0$

$$ax^2+bx=0$$

$$(ax+b)x=0$$

$\Leftrightarrow \quad ax+b=0 \quad \vee \quad x=0$

$\Leftrightarrow \quad x=\frac{-b}{a} \quad \vee \quad x=0$

Løsningene er $\{0, \frac{-b}{a}\}$.

$$\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x=0$$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}x-\frac{4}{3}\right)x=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-\frac{4}{3}=0 \vee x=0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}x=\frac{4}{3} \quad \vee \quad x=0$

$\Leftrightarrow \quad x=\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{9} \quad \vee \quad x=0$

Løsningene er $\underline{0 \text{ og } \frac{8}{9}}$

Eksempel med dobbel løsning

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow (x+2)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 0 \quad \vee \quad x+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \vee \quad x = -2$$

Løsningen er $\underline{x = -2}$

Eksempel med ingen løsning

$$x^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 = 0$$

har ingen løsning fordi $x^2 \geq 0$ for alle x, og kan derfor aldri bli lik -1.

Tilfellet $b=0$

$$ax^2 + c = 0 \qquad a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$x^2 + d \geq d$ for alle x.

$x^2 + d = 0$ har ingen løsning når $d > 0$

$x^2 = 0$ når $d = 0$, og vi har én løsning: $\underline{x = 0}$

$$x^2 + d = x^2 - (-d) = 0$$

$$(x + \sqrt{-d})(x - \sqrt{-d}) = 0 \qquad \text{når } d < 0$$

konjugatsetningen $\quad -d > 0$.

$$\Leftrightarrow \quad x + \sqrt{-d} = 0 \quad \vee \quad x - \sqrt{-d} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{-d} \quad \vee \quad x = \sqrt{-d}$$

Løsningene til $x^2 + d = 0$, $d < 0$ er $-\sqrt{-d}$ og $+\sqrt{-d}$.

Vi skriver dette som $\pm\sqrt{-d}$

$$x^2 = e \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - e = 0$$

Løsningene er $\pm\sqrt{e}$.

* $x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x-3 = 0 \ \vee \ x+3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \ \vee \ x = -3$

Løsningene er $\pm\sqrt{9} = \underline{\pm 3}$.

* $x^2 = 5$ Løsningene er $\underline{x = \pm\sqrt{5}}$

* $3x^2 - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{7}{3}$

Løsningene er $\pm\sqrt{\frac{7}{3}} = \underline{\pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}$

Fullføring av kvadratet

$$x^2 + bx + c \qquad a = 1$$

$$= \underbrace{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2}_{x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

omskrivingen kalles å fullføre kvadratet.

eks

$$x^2 + 6x + 5$$

$$= (x+3)^2 - 9 + 5 \qquad = (x+3)^2 - \underbrace{2^2}_{4}$$

$$= ((x+3) + 2)((x+3) - 2)$$

$$= (x+5)(x+1)$$

Dette lar oss løse 2-gradslikningen $x^2 + 6x + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+5)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \vee x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = -1.$$

Løsningene er $\underline{-5 \text{ og } -1}$.

Heltallsmetoden $(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + p \cdot q$

$$x^2 + bx + c$$

ønsker å finne p og q slik at $p+q = b$, $p \cdot q = c$

$x^2 + 6x + 5$ ønsker p, q slik at $p+q = 6$, $p \cdot q = 5$

Finner $p = 1$, $q = 5$ (eller $p = 5$ og $q = 1$)

så $x^2 + 6x + 5 = (x+5)(x+1)$ ...

eks: $x^2 + 5x + 6$ ønsker p, q $p+q = 5$, $p \cdot q = 6$

$= (x+2)(x+3)$

løsning $p = 2$ og $q = 3$

Faktoriserer x^2+5x+6 ved å fullføre kvadratet

$$x^2+5x+6$$

$$= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{6\cdot 4}{4}$$

$$\frac{-25+24}{4}$$

$$= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$ konjugatsetningen

$$= \left(x+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \underline{(x+3)(x+2)}.$$

Fullfører kvadratet

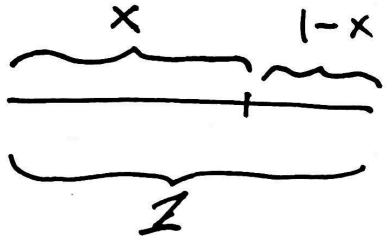
$$x^2-4x+7$$

$$= \left(x+\frac{-4}{2}\right)^2 - \left(\frac{-4}{2}\right)^2 + 7$$

$$= (x-2)^2 - 4 + 7 = (x-2)^2 + 3$$ kan ikke faktoriseres.

$x^2-4x+7=0$ har tomm løsningsmengde.

Gylne forhold (snitt)



Gyldne forhold $=$ $\dfrac{\text{Hele}}{\text{lengste bit}} = \dfrac{\text{lengste bit}}{\text{korteste bit}}$.

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \qquad 0 < x < 1$$

Ganger med x og med $1-x$ på begge sider av likhetstegnet.

$$1-x = x^2 \iff \underline{x^2 + x - 1 = 0}$$

Fullfører kvadratet:

$$x^2 + x - 1$$
$$= \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 1$$
$$= \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{4}$$
$$= \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{5}{4} = \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\tfrac{5}{4}}\right)^2 = \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$
$$= \left(x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

konjugatsetningen

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 0 \quad \vee \quad x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 0$$

Løsningene er $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ og $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

x må være positiv i vårt eksempel

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \sim \underline{0.618\ldots}$$

Gylne forhold er $\frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = x + 1 \sim 1.6180339887\ldots$$

irrasjonalt tall.

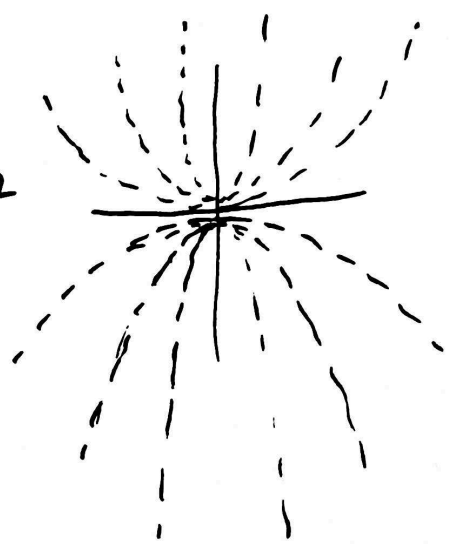
Søk gjerne på "golden ratio".

Grafen til et annengradsuttrykk kalles en **parabel**

$ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$

$b = c = 0$

$y = ax^2$



Bretter for a stor.

$a > 0$

$a < 0$

Grafen til $x^2 + bx + c$ er en vertikal og horisontal forskyvning av grafen til x^2.

Det er den geometriske fortolkningen av det å fullføre kvadratet:

$$x^2 + bx + c$$
$$= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

Har en graf som er lik grafen til x^2 forskjøvet horisontalt med $\frac{-b}{2}$ (bunnpunktet har x-koordinat lik $-b/2$)

og vertikalt med $c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ (bunnpunktet har y-koordinat lik $c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$).