9 sep
26

Likningssystem

(boka: 4G)

$$x + 2y = 1$$
$$2x + 7y = -1$$

Lineært likningssystem med 2 likninger og 2 ukjente

$$2x^2 + 4y^2 = 3$$
$$x + 2y = 2$$

Ikke-lineært likningssystem

Løsningene til et likningssystem er alle par (x, y) (etc...) slik at alle likningene i LS er sanne samtidig

Innsetningsmetoden: $x + 2y = 1$ gir at $x = 1 - 2y$

setter dette inn i den andre likningen

$$2(1-2y) + 7y = -1 \iff 2 - 4y + 7y = -1$$
$$\iff (7-4)y = -1 - 2$$

$3y = -3$ så $y = -1$

$x = 1 - 2y = 1 - 2(-1)$

$= 1 + 2 = 3$

Løsningene er $\{(3,-1)\}$

Alternativt: $(x,y) = (3,-1)$

: $x = 3$ og $y = -1$ ...

Addisjonsmetoden.

L1 $\quad x + 2y = 1$

L2 $\quad 2x + 7y = -1$

L1 sann $\Leftrightarrow$ $c \cdot$ L1 sann (skalert med c) — reelt tall $c \neq 0$

L1 og L2 sann $\Leftrightarrow$ L1 og L1 + L2 sann

$-2L1$ $\quad -2x - 4y = -2$

$L2$ $\quad 2x + 7y = -1$

$-2L1 + L2$ $\quad 0 + 3y = -3$

$\frac{1}{3}(-2L1 + L2)$ $\quad \underline{y = -1}$ og $x + 2y = 1$

så $\quad x + 2(-1) = 1$

$\underline{x = 1 + 2 = 3}$

L1 og L2 samm $\Leftrightarrow$ $x = 3$ og $y = -1$

Løsningene er $x = 3$ og $y = -1$.

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ -2x - 6y &= 3 \end{aligned} \quad \swarrow \cdot 2 \quad \text{gir}$$

$$x + 3y = 2$$

$0 + 0 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ Galt for alle x og y.

Ingen løsninger.

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ -2x - 6y &= -4 \end{aligned} \quad \swarrow \cdot 2$$

$$x + 3y = 2$$

$0 = 0$ Sann

Løsningene er alle par (x, y) slikt at $x + 3y = 2$ (en linje av løsninger)

$$\{(2 - 3y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

$2x^2 + 4y^2 = 3$

$x + 2y = 2$ så $x = 2 - 2y$

setter dette inn i L1.

$2(2-2y)^2 + 4y^2 = 3$ 2. grads likning i y

$2 \cdot 2^2 \underbrace{(1-y)^2}_{y^2-2y+1} + 4y^2 = 3$

$8y^2 - 16y + 8 + 4y^2 = 3$

$12y^2 - 16y + 5 = 0$

$$y = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12}}{2 \cdot 12} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{24}$$

$$= \frac{16 \pm 4}{4 \cdot 6}, \quad \frac{4(4 \pm 1)}{4 \cdot 6} = \frac{4 \pm 1}{6}$$

$y = \frac{1}{2}$ og $y = \frac{5}{6}$

$$x = 2 - 2y$$

$y = \frac{1}{2}$: $\quad x = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$y = \frac{5}{6}$: $\quad x = 2 - 2\frac{5}{6} = \frac{12}{6} - \frac{10}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Løsningene er $\quad x = \frac{1}{3}$ og $y = \frac{5}{6}$

og $\quad x = 1$ og $y = \frac{1}{2}$

$$\underline{\left\{ \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{6}\right), \left(1, \tfrac{1}{2}\right) \right\}}$$

En linje $y = ax + b$ går gjennom (x_1, y_1) (x_2, y_2) $\quad x_1 \neq x_2$

$$\left.\begin{aligned} a x_1 + b &= y_1 \\ a x_2 + b &= y_2 \end{aligned}\right\} \cdot (-1)$$

$$a x_1 + b = y_1$$

$$a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ stigningstallet til linjen

$$b = y_1 - a x_1 .$$

eks: Linjen gjennom $(-1,3)$ og $(2,5)$

$$a = \frac{5-3}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$$

$$a(-1) + b = 3 \quad \text{så} \quad b = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}.$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}.$$

Finn parabelen $y = ax^2 + bx + c$ som går gjennom $(1,1)$, $(2,0)$ og $(3,6)$.

$x=1$ L1 $a+b+c=1$

$x=2$ L2 $4a+2b+c=0$

L3 $9a+3b+c=6$

Lineært likningssystem i a, b og c.

L1	$a+b+c=1$	$a+b+c=1$
L2-L1	$3a+b=-1$	$3a+b=-1$
L3-L1	$8a+2b=5$ $\swarrow -2$	$2a=5+2=7$

$a=\frac{7}{2}$, $b=-1-3a=-1-\frac{3\cdot 7}{2}=-\left(\frac{2+21}{2}\right)$

$=-23/2$

$c=1-a-b=1-\frac{7}{2}+\frac{23}{2}=1+\frac{23-7}{2}=1+\frac{16}{2}=9$

$y=\frac{7}{2}x^2-\frac{23}{2}x+9$

plotta

Tegnet opp i geogebra og observerte at de tre punktene ligger i grafen.

Ikke-lineært likningssystem

$$xy - 3x = 3$$

$$2x + y = 10 \quad \text{så} \quad y = 10 - 2x$$

setter dette inn i L1.

$$x(10-2x) - 3x = 3$$

$$-2x^2 + 10x - 3x - 3 = 0$$

$$-2x^2 + 7x - 3 = 0$$

abc-formelen

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(-2)(-3)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-4} = \frac{-7 \pm 5}{-4}$$

$x = \frac{-12}{-4} = 3$ og $y = 10 - 2 \cdot 3 = 4$

$x = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$ og $y = 10 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 9$

Løsningene er

$\underline{(3,4) \text{ og } (\frac{1}{2}, 9)}$

Parabler gjennom 2 punkter.

Gjennom $(2,0)$ og $(-3,0)$

$a(x-2)(x+3)$ $\quad a \in \mathbb{R}$

Gjennom $(0,1)$ og $(1,3)$

setter inn i $y = ax^2+6x+c$

$c = 1.$

$3 = a+b+c$ $\quad c=1$ så

$a+6=2.$

$b = 2-a.$

$y = ax^2 + (2-a)x + 1$

Familie av parabler

Illustrerte løsningene i geogebra ved å variere parameteren a.

Oppg. Løs

$$2x + 3y = 1$$
$$3x + 2y = 4$$

Innsetting: L1 $3y = 1 - 2x$ si $y = \frac{1}{3}(1-2x)$

setter inn i L2:

$$3x + \frac{2}{3}(1-2x) = 4$$
$$3x - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} = 4$$
$$(3 - \frac{4}{3})x = 4 - \frac{2}{3} \quad | \cdot 3$$
$$(9-4)x = 12 - 2$$
$$5x = 12 - 2 = 10$$
$$x = \frac{10}{5} = \underline{2}$$
$$y = \frac{1}{3}(1 - 2 \cdot 2) = \frac{-3}{3} = \underline{-1}$$

Løsningen er $\underline{(2,-1)}$.

(L2 - L1: $x - y = 3$
$y = x - 3$
enklere enn istad
$2x + 3(x-3) = 1$ ... etc.)