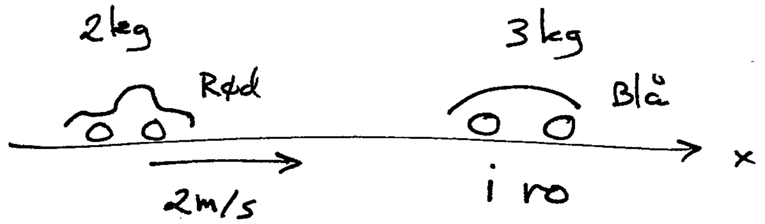
①

Løsningsforslag til eksamen i FO340E
4 juni 2009

<u>Oppg 1</u> a)



Etter kollisjonen forventer vi at den blå bilen beveger seg mot høyre og at den røde bilen spretter tilbake og beveger seg mot vensdre.

La U være farten til den røde bilen og V farten til den blå bilen etter kollisjonen.

Bevaring av bevegelsesmengde $\quad 2\cdot U + 3V = 4$

Bevaring av kinetisk energi (elastisk kollisjon):

$$\frac{2}{2}U^2 + \frac{3}{2}V^2 = \frac{2}{2}\cdot 2^2 = 4.$$

Vi reduserer dette til en likning med ukjent V og løser:

$$2U = 4 - 3V$$

$$4U^2 + 6V^2 = (4-3V)^2 + 6V^2 = 4\cdot 4 = 16.$$

$$16 - 24V + (9+6)V^2 = 16$$

$$V(15V - 24) = 0$$

$V \neq 0$ så $\quad V = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}, \quad U = \frac{1}{2}\left(4 - 3\cdot\frac{8}{5}\right) = \frac{-2}{5}$

→

②

Den blå bilen beveger seg mot høyre med farten $\frac{8}{5}$ m/s = $\underline{1.6 \text{ m/s}}$ og den røde bilen beveger seg mot venstre med farten $\frac{2}{5}$ m/s = $\underline{0.4 \text{ m/s}}$

b) Etter kollisjonen forventer vi at begge bilene beveger seg mot venstre.
Vi regner ut U og V tilsvarende som i a).

$$2U + 3V = -6$$
$$\frac{2}{2}U^2 + \frac{3}{2}V^2 = \frac{3}{2}2^2 = 6$$

Dette gir $\quad 3V = -6 - 2U$

$$6U^2 + 9V^2 = 6U^2 + (3V)^2$$
$$= 6U^2 + (-6-2U)^2 = 36 + 24U + (6+4)U^2 = 36$$
$$(10U + 24)U = 0$$

Så
$$U = -\frac{24}{10} = -\frac{12}{5}$$
$$V = \frac{1}{3}\left(-6 - 2\left(-\frac{12}{5}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{-30+24}{5}\right) = -\frac{2}{5}$$

Den røde bilen beveger seg mot venstre med farten $\frac{12}{5}$ m/s = $\underline{2.4 \text{ m/s}}$ og den blå bilen beveger seg mot venstre med farten $\frac{2}{5}$ m/s = $\underline{0.4 \text{ m/s}}$

(3)

c) I en uelastisk kollisjon vil bilene bevege seg sammen etter kollisjonen. Bevegelses mengden er bevart men ikke den kinetiske energien.

Bevegelses mengden før kollisjonen er

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 0$$

Begge bilene stopper opp etter kollisjonen.

d) Etter kollisjonen forventer vi at begge bilene spretter tilbake. Siden bevegelses-mengden før kollisjoner er 0 (fra c)) forventer vi at bilene vil ha samme fart etter kollisjonen som de hadde før kollisjonen.

$$2U + 3V = 0$$

$$\frac{2}{2} U^2 + \frac{3}{2} V^2 = 1 \cdot 3^2 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 .$$

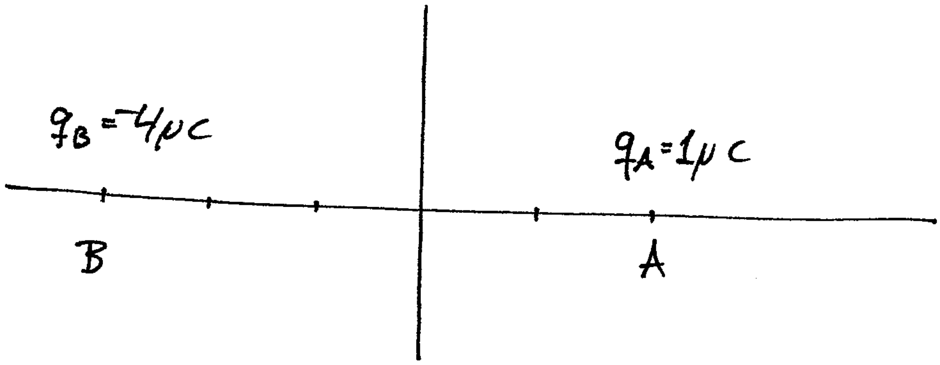
Løsningene (med $U<0$ og $V>0$) er

$$U = -3 \, m/s \quad og \quad V = 2 \, m/s.$$

Den røde bilen beveger seg mot venstre med farten 3 m/s og den blå bilen beveger seg mot høyre med farten 2 m/s. Fartsvektorene endrer retning men ikke størrelse.

(4)

Oppg2.



a) Det elektriske feltet i origo er

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = k_0 \frac{1\mu C}{(2m)^2}(-\vec{i}) + k_0 \frac{-4\mu C}{(3m)^2}(\vec{i})$$

$$= k_0 \cdot 1\mu C/m^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{9}\right)(-\vec{i})$$

$$= 9 \cdot 10^9 Nm^2/C \cdot 10^{-6} C/m^2 \cdot \frac{25}{4 \cdot 9}(-\vec{i})$$

$$= \underline{6.25 \cdot 10^3 (-\vec{i}) N} \simeq 6.3 \cdot 10^3 (-\vec{i}) N$$

b) Det eksisterer akkurat ett punkt P med ladning $1\mu C$ slik at feltet fra A, B og P blir $\vec{0}$ i origo. $\vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_P = 0$

så $\vec{E}_P = k_0 \cdot 1\mu C/m^2 \cdot \frac{25}{36}(\vec{i})$

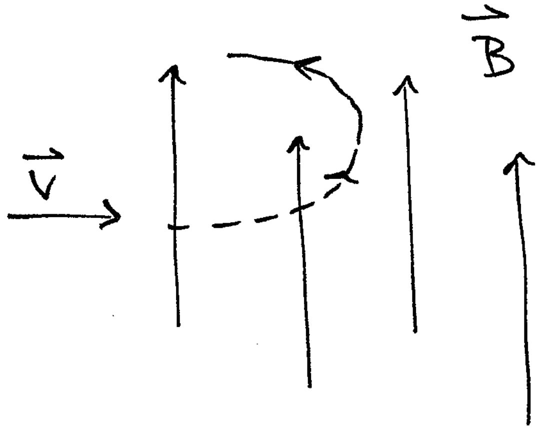
$$= k_0 \cdot 1\mu C / \left(\tfrac{6}{5}m\right)^2 (\vec{i})$$

Retningen til feltet er $\vec{PO}$, så P ligger på den negative x-aksen.

Punktet P er $\underline{\left(\frac{-6}{5}, 0\right) m}$

⑤

c) Kraften på en ladd partikkel med fartsvektor $\vec{v}$ og ladning q i et magnetfelt $\vec{B}$ er $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$.



masse m.

$\vec{v} \times \vec{B}$ er da ut av planet (arket).
Hvis $q < 0$ så er $\vec{F}$ inn mot planet.
Sirkelbuen blir derfor som angitt på figuren.

$\vec{F}$ er vinkelrett til $\vec{v}$, så kraften utfører ikke noe arbeid på partikkelen. Derfor er $|\vec{v}| = v$ konstant.
Akselerasjonen til partikkelen er

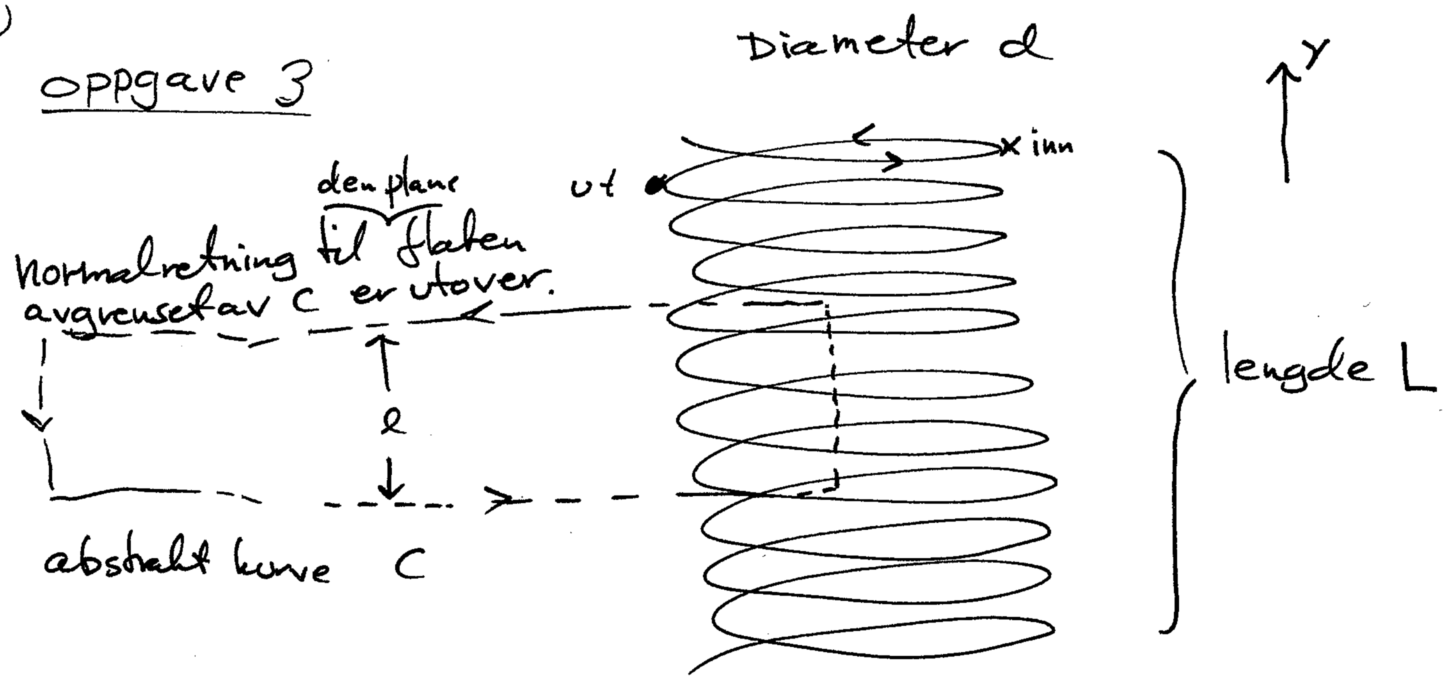
$a = \frac{|\vec{F}|}{m} = \frac{|q| \cdot v \cdot B}{m}$ siden $\vec{v}$ og $\vec{B}$ er ortogonale.

$\vec{a}$ og $\vec{v}$ er i planet vinkelrett på $\vec{B}$ og a og v er konstante. Siden $\vec{a}$ står vinkelrett på $\vec{v}$ vil partikkelen bevege seg i en sirkelbane (konstant krumningsradi) med radius $R = \frac{v^2}{a}$

$$R = \frac{v^2}{|q| v \cdot B / m} = \underline{\frac{v m}{|q| B}}$$

(6)

oppgave 3



N vindinger

Amperes lov $\qquad \oint_C \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \cdot (\text{Strøm gjennom } C).$

$\mu_0 \cdot \text{Strøm gjennom } C \quad = \mu_0 \cdot \left(\frac{N}{L} \cdot \ell\right) \cdot I$

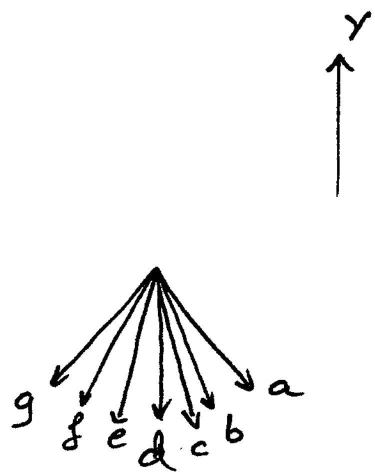
(I har samme retning som normalretningen til den plane flaten avgrenset av C).

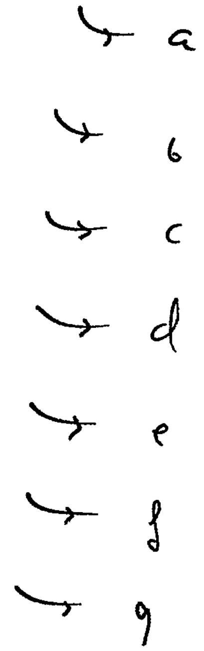
Inni spolen er magnetfeltet i retningen til y-aksen og utenfor spolen er magnetfeltet i motsatt retning til y-aksen. Dette er gyldig for en lang spole så lenge vi holder oss omtrent midt på spolen.

Vi illustrerer dette med en figur hvor vi tegner inn magnetfelt bidraget fra segmenter av spolen som ligger ovenfor hverandre.

→

7





Totalfeltet er i negativ y-retning.

Vi får da at $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$

$= \quad B \cdot l \quad + \quad 0$ (horisontale deler av C)

$+ \quad 0$ (venstre vertikal del, hvor $\vec{B}$ er veldig svak)

$$B \cdot l = \mu_0 I N l / L$$

så $\quad B = \mu_0 I N / L$

⑧

b) Selvinduksjon er den elektromotoriske spenning som oppstår (i en spole) når strømmen endrer seg med tiden.

Endringen i strømmen gir endring i den magnetiske fluksen, som ved Faradays lov gir en elektromotorisk spenning.

selv induktans $L = \frac{\Phi}{I} \cdot$ antall vindinger.

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}.$$

I spolen er selvinduktansen

$$L = \frac{\Phi}{I} \cdot N = \frac{B \cdot \pi \cdot (d/2)^2}{I} \cdot N$$

$$= \frac{\pi \mu_0 I \cdot N/L \cdot (d/2)^2}{I} \cdot N \qquad \text{ved a)}$$

$$= \frac{\pi \cdot \mu_0 N^2 \cdot d^2}{4L}$$

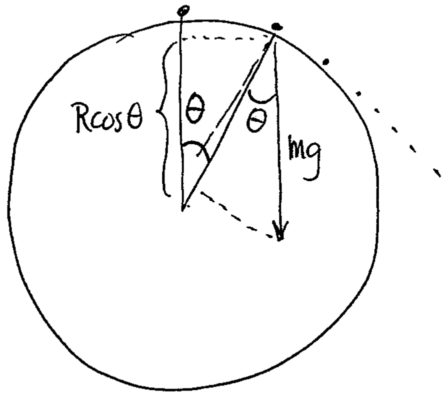
9

oppgave 4

a)

massen til partikkelen er m.

Radius R



Normalkraften fra partikkelen mot sylinderen er $m \cdot g \cdot \cos\theta$.

Partikkelen fortsetter å skli på sylinderen så lenge normalkraften overstiger sentripetal akselerasjonen · massen.

$$m \cdot g \cdot \cos\theta \geq \frac{v^2}{R} \cdot m$$

Partikkelen forlater sylinderen når

$$g \cdot \cos\theta = \frac{v^2}{R}.$$

Vi bruker energibevaring til å finne banefarten $v(\theta)$.

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = (R - R\cos\theta) \cdot g \cdot m$$

$$v^2 = 2Rg(1-\cos\theta)$$

Dette gir:

$$g \cdot \cos\theta = 2Rg(1-\cos\theta)/R$$

$$\cos\theta = 2 - 2\cos\theta$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = \underline{48°} = \underline{0.84 \text{ rad}}$$

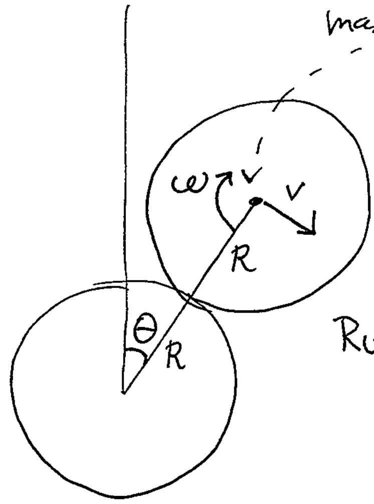
(10)

Sylinderen sklir en distanse $R \cdot \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$
$= \underline{R \cdot 0.84}$

b) Massesenteret til sylinderen i bevegelse er i avstand $2R$ fra senteraksen til den faste sylinderen (mens den roller). Hvis sylinderen skle ville den forlate den faste sylinderen ved samme vinkel som i a) (uavhengig av radius). Siden den roller vil noe av den kinetiske energien bidra til å rotere sylinderen. Den har derfor en lavere banefart (for en gitt θ) enn om den skle. Derfor blir sentripetalakselerasjonen mindre og vi forventer at sylinderen roller av ved en vinkel som er større enn den i a). Sylinder roller lengre enn partikkelen skle, før den forlater den faste sylinderen.

(11)

c)



Roller

massesenteret på rotasjonsaksen

$$2R \cdot \frac{d\theta}{dt} = V$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Endring i potensiell energi : $2R(1-\cos\theta)\cdot g \cdot M$

Endring i kinetisk energi er ved Königs teorem : $\frac{MV^2}{2} + \frac{I}{2}\omega^2 = \frac{M}{2}V^2 + \frac{MR^2/2}{2}\cdot\left(\frac{V}{2R}\right)^2$

$$= MV^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\right) = \frac{9}{16}MV^2$$

Energibevaring gir

$$2R(1-\cos\theta)\cdot g\cdot M = \frac{9}{16}MV^2$$

så $\frac{V^2}{2R} = \frac{16}{9}(1-\cos\theta)\cdot g$

Sylinderen ruller av når sentripetalakselerasjonen er lik normalkomponenten til tyngdeakselerasjonen:

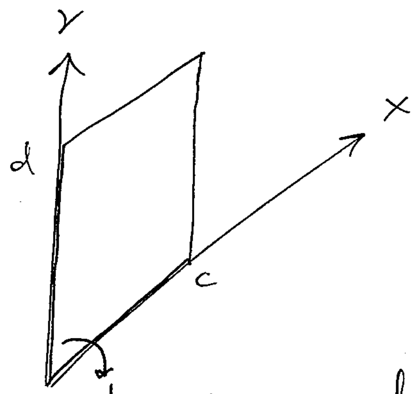
$$\frac{V^2}{2R} = \frac{16}{9}(1-\cos\theta)\cdot g = \cos\theta\cdot g$$

$$16 = (16+9)\cos\theta = 25\cos\theta$$

Så $\theta = \arccos\left(\frac{16}{25}\right) = \underline{50^\circ} = \underline{0.88 \text{ rad}}$

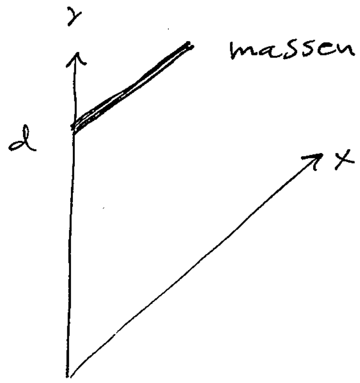
Sylinderen ruller en distanse $R\cdot 0.88$ før den forlater den faste sylinderen.

Oppg 5



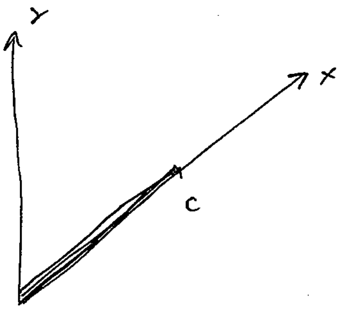
rotere om x-aksen.

a) Vi deler rammen opp i sine fire sider.

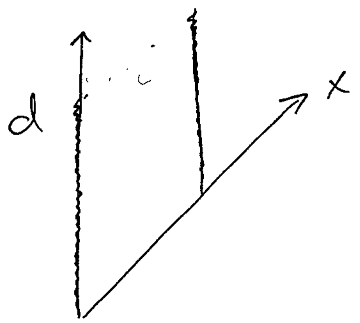


massen er $c \cdot \lambda$

dreiemomentet er $(c \cdot \lambda) \cdot d^2$.



dreiemomentet er 0 (avstanden til dreieaksen er 0).



Dreiemomentet til hver av sidene er

$$\int_0^d \lambda \cdot x^2 \, dx = \underline{\lambda \cdot d^3/3}$$

Dreiemomentet til rammen er summen av dreiemomentet til hver av sidene:

$$I = c \cdot \lambda \cdot d^2 + 0 + 2 \cdot \lambda \cdot d^3/3$$

$$I = \underline{\underline{\lambda \cdot d^2 \left(c + \frac{2d}{3}\right)}}$$

13

b) Massesenteret ligger i midten av rammen.

Endring i potensial energi er : $\frac{d}{2} \cdot g \cdot$ massen til rammen

$$= \frac{d}{2} \cdot \lambda(2d+2c)g = \underline{\lambda d(d+c)g}$$

Rammen står i ro vertikalt så vinkelfarten ω

må være slik at $E_{kin} = \frac{I\omega^2}{2} = \lambda d(d+c)$

Dette gir $$\omega^2 = \frac{2\lambda d(d+c)g}{\lambda d^2(c+2d/3)}$$

$$\omega^2 = \frac{2(d+c)g}{d(c+2d/3)}$$

ω er positiv, så

$$\omega = \sqrt{\frac{2(d+c)g}{d(c+2d/3)}}$$

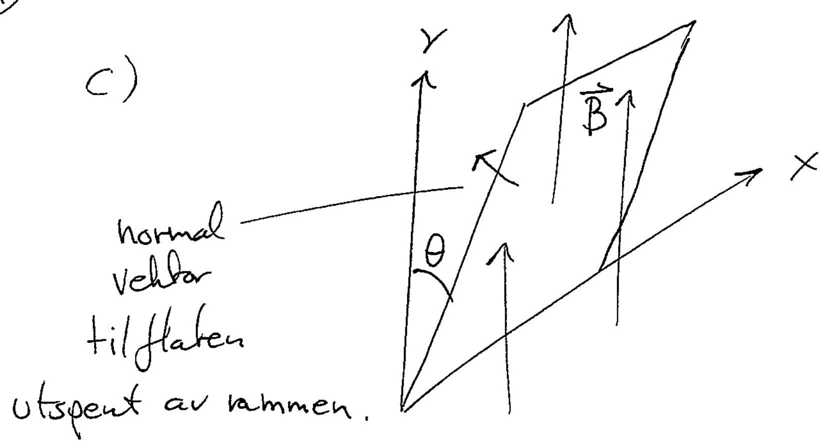
$$= \sqrt{\frac{2\ (6+2)\cdot g}{6(2+2\cdot 6/3)\ m}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9}\cdot 9.8}\ s^{-1}$$

$$= \underline{\underline{2.1\ s^{-1}}}$$

(14)

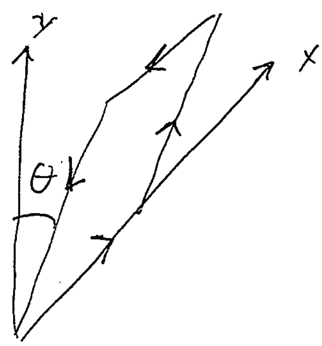
c)



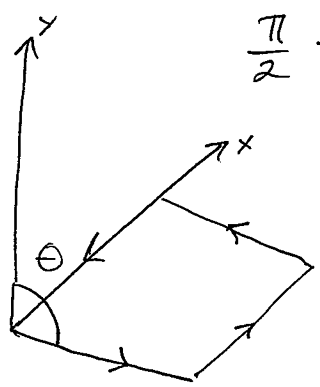
Fluksen til magnetfeltet gjennom rammen endrer seg med tiden når rammen faller. Med valget av normalvektor til flaten utspent av rammen som i figuren, vil fluksen øke når θ øker fra 0 til $\frac{\pi}{2}$, avta når θ går fra $\pi/2$ til π.
På veg opp igjen vil fluksen avta fra π til $3\pi/2$ og øke fra $3\pi/2$ til 2π.

Ved Faradays lov blir det indusert en elektrisk spenning i rammen: $\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$.
Dette gir en elektrisk strøm i rammen.

Ved Lenz lov vil den induserte strømmen motvirke endringen i fluksen.



$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$



$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

(15)

d) Fluksen er $\Phi = B \cdot c \cdot d \cdot \sin\theta$.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B c\, d \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Vinkelfarten ω er $\frac{d\theta}{dt}$.

Vi kan finne ω på samme måte som i del b) :

$$\underbrace{\frac{d}{2}(1-\cos\theta)}_{\text{høydetapet til massesenter}} \underbrace{\cdot 2\lambda(d+c)\cdot g}_{\text{vekten}} = E_{pot}$$

$$E_{kin} = \frac{I\omega^2}{2} = E_{pot}$$

Så
$$\omega^2 = \frac{2}{I}\cdot\lambda(1-\cos\theta)\cdot d(d+c)\cdot g$$

$$= \frac{2\lambda d(d+c)\cdot(1-\cos\theta)\cdot g}{\lambda d^2(c+2d/3)}$$

$(1-\cos 60° = \frac{1}{2})$

$$= \frac{2(d+c)\cdot\frac{1}{2}\cdot g}{d(c+2d/3)}$$

$$\mathcal{E} = -Bc\cdot d\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(d+c)\,g}{d(c+2d/3)}}$$

$$= -0.00010\,\text{T}\cdot 2.0\,\text{m}\cdot 6.0\,\text{m}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(6+2)\cdot g\,\text{m}^{-1}}{6(2+4)}}$$

$$= \underline{-0.89\,\text{mV}}$$