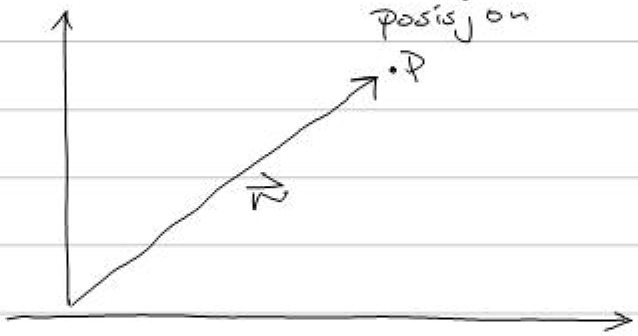
Onsdag 14 januar 2-3 og 2-4



(referanse)
Valgt et koordinatsystem

Posisjonsvektoren $\vec{r}$ er forflytningsvektoren fra origo O til posisjonen P. $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

Posisjonen p varierer med tiden, $p(t)$.

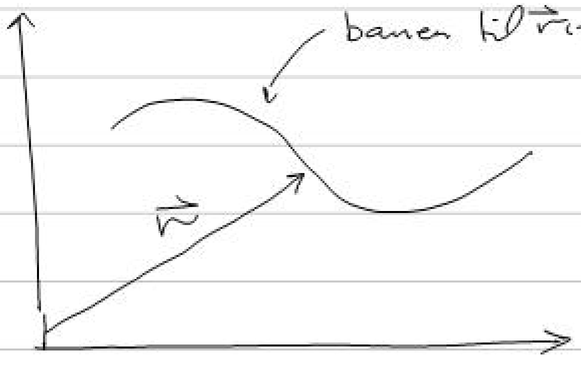
$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP(t)}$ vektorfunksjon.

$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ (3-dimensjonalt)

$\langle x(t), y(t) \rangle$ (2-dimensjonalt)

Annen notasjon som kan være nyttig

$\vec{r}(t) = \langle r_x(t), r_y(t) \rangle$ eller $\langle r_1(t), r_2(t) \rangle \ldots$



$\vec{r}(t)$ posisjonsvektoren til en partikkel i tiden t, $t \in [a, b]$ for eksempel tidsintervallet $[-1, 2]$.

Grafen til $\vec{r}(t)$, eller banen til $\vec{r}(t)$, er mengden av punkt $(x(t), y(t))$ for $t \in [a, b]$.

Ulike posisjonsvektor funksjoner kan gi opphav til samme bane.

For eksempel: $\langle \sin t, \sin t \rangle$ $t \in [0, 5\pi]$

$\langle t, t \rangle$ $t \in [-1, 1]$

$\langle t^5, t^5 \rangle$ $t \in [-1, 1]$

har alle samme graf (bane).

Forflyttings vektor $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$

Gjennomsnittleg fartsvektor i tidsintervallen $[t_1, t_2]$ er $\dfrac{\Delta \vec{r}}{t_2 - t_1}$

La t_2 være en liten (Δt) endring fra t_1

Grensen hvor $\Delta t \to 0$ "går mot null" gir momentan fartsvektor i tidspunktet:

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \left\langle \frac{d}{dt} r_x(t), \frac{d}{dt} r_y(t), \frac{d}{dt} r_z(t) \right\rangle$$

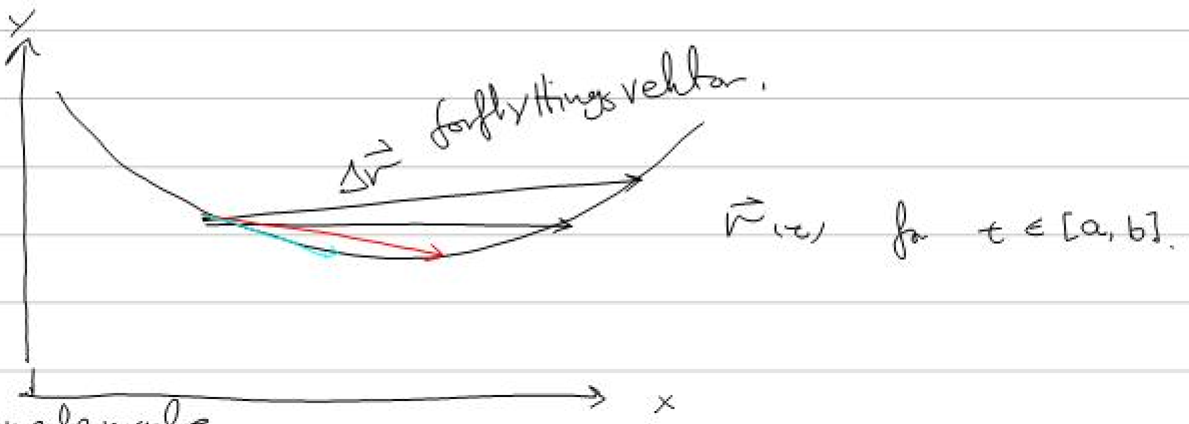
"Vi deriverer en vektorfunksjon komponentvis".

Tilsvarende er akselerasjonen $\vec{a}(t) = \dfrac{d}{dt} \vec{V}(t) = \dfrac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t)$.

Eksempler gjennomgått på tavlen

$\vec{r}(t) = \langle t, t^2 \rangle$ $t \in [-1, 2]$ og

$\vec{r}(t) = \langle \sqrt{t}, t \rangle$ $t \in [0, 2]$.



Banelengde

$s(t)$: tilbakelagt strekning fra $t=a$ til tiden t.

$s(a) = 0$.

$$s(t+\Delta t) - s(t) \sim |\Delta\vec{r}| = |\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)|$$

når Δt er liten. (og positiv!)

$$\Delta s = |\langle \Delta x, \Delta y, \Delta z \rangle|$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \left|\left\langle \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right\rangle\right| \qquad (\text{siden } \Delta t > 0)$$

I grensen $\Delta t \to 0$ får vi

$$\frac{ds(t)}{dt} = |\vec{V}(t)| \qquad \text{banefarten.}$$

Derfor er $s(t) = \int_a^t ds = \int_a^t |V(t)|\, dt$.

På tavlen tegnet vi opp banen til

$\vec{r}(t) = \langle t^2, t^3 \rangle \qquad t \in [-1, 2]$

og regnet ut banelengden fra $t=0$ til tiden $t>0$. Vi brukte substitusjon til å regne ut integralet for $s(t)$.

Ofte er integralene for $s(t)$ vanskelige å evaluere eksakt.

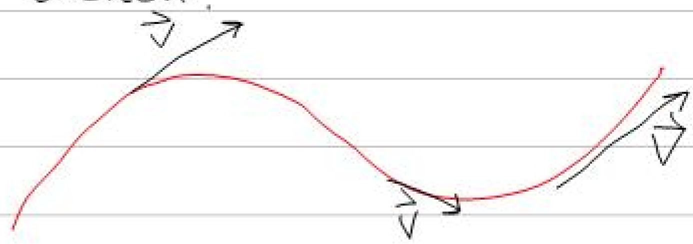
La $t_1 < t_2$. Generelt er $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$ større eller lik $|\Delta \vec{r}| = |\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)|$

Merk at $s(t)$ kan være større en total lengde på banen. Det ~~kan~~ skje hvis vi går langs samme bane flere ganger.

La følgende linjestykke ha lengde 2

Hvis vi går jevnt fra A til B, så fra B til A og så videre fra A til B så er banelengden $2 \times 3 = 6$. (Se eksemplene på side 2.)

Merk at fartsvektoren ligger i tangensiell retning til banen.



$|\vec{v}|$ kalles derfor banefart fordi det er farten langs banen (til partikkelen)

$\vec{v}$ er konstant : $|\vec{v}|$ banefarten er konstant og retningen til $\vec{v}$ er konstant.