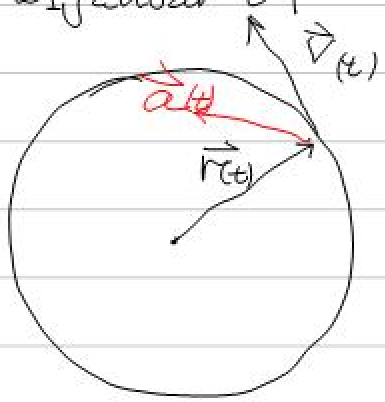
Onsdag 21 januar 09

Sirkelbevegelse 2.7



Konstant lengde på posisjonsvektor $R = |\vec{r}(t)|$

Banefarten $V(t) = |\vec{V}(t)|$ kan variere med tiden.

Siden $|\vec{r}(t)|$ er konstant følger det at $\vec{r}(t)$ og $\vec{V}(t)$ er ortogonale :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = \frac{d}{dt}R^2 = 0$$
$$= 2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{r}\cdot\vec{V}.$$

Vi ønsker å dekomponere akselerasjonen i en tangential og normal retning.

Enhets vektor i tangential retning er $\vec{u}_T = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$ (forutsatt $\vec{V} \neq \vec{0}$)
Siden $\vec{V}$ og $\vec{r}$ er ortogonale er normalretningen $\frac{\vec{r}}{R}$ eller $-\frac{\vec{r}}{R}$. Vi lar normal vektoren peke i retningen grafen krummer : $\vec{u}_N = \frac{-\vec{r}}{R}$.

Vi benytter en parametrisering av $\vec{r}(t)$:
$$\vec{r}(t) = R\langle \cos\theta(t), \sin\theta(t)\rangle.$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\langle -\sin\theta(t), \cos\theta(t)\rangle \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Banefarten er $V(t) = |\vec{V}(t)| = R\left|\frac{d\theta}{dt}\right| = \begin{cases} R\frac{d\theta}{dt} & \text{roterer i + retning} \\ -R\frac{d\theta}{dt} & \text{roterer i − retning} \end{cases}$

i tiden t.

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(v(t)\,\vec{u}_T\right)$$

$$= \left(\frac{d}{dt}v(t)\right)\vec{u}_T + v(t)\cdot\frac{d}{dt}\vec{u}_T.$$

$$\vec{u}_T = \begin{cases} \langle -\sin\theta, \cos\theta\rangle & \text{hvis } d\theta/dt > 0 \\ -\langle -\sin\theta, \cos\theta\rangle & \text{hvis } d\theta/dt < 0 \end{cases}$$

$$\text{så } \frac{d}{dt}\vec{u}_T = \begin{cases} -\langle \cos\theta, \sin\theta\rangle\, d\theta/dt & \text{hvis } \frac{d\theta}{dt} > 0 \\ +\langle \cos\theta, \sin\theta\rangle\, d\theta/dt & - \ \frac{d\theta}{dt} < 0 \end{cases}.$$

$$= -\frac{\vec{r}}{R}\,\frac{d\theta}{dt}\cdot\begin{cases} 1 & d\theta/dt > 0 \\ -1 & d\theta/dt < 0 \end{cases}$$

$$= -\frac{\vec{r}}{R}\cdot\left|\frac{d\theta}{dt}\right| = \left(v(t)/R\right)\vec{u}_N$$

Vi får dekomposisjonen av $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}v(t)\cdot\vec{u}_T + \frac{v(t)^2}{R}\vec{u}_N.$$

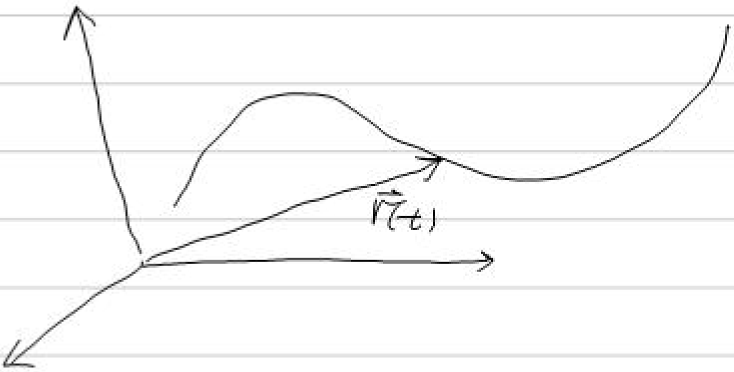
$$= a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$$

Tangentialkomponenten til akselerasjonen er $a_T = \frac{dv}{dt}$
Normalkomponenten til akselerasjonen er $a_N = v^2/R$
Normalkomponenten til $\vec{a}$ kalles også sentripetalkomponenten.

Vi gikk gjennom følgende eksempel: En partikkel beveger seg i en sirkelbane med radius $R = 5m$. Banefarten øker jevn fra 0 ($t=0$) til den når 10m/s etter 2 omdreininger.

1) Hvor lang tid tar det å gjøre de 2 omdreiningene?
2) Hva er total akselerasjon etter 1 omdreining?
3) Hva er banefarten etter første omdreining?

2.8 Tangential- og normal-komponent for akselerasjon



Tangensial retning er $\vec{u}_T = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$ $(\vec{V} \neq \vec{0})$

Dette er en enhetsvektor $|\vec{u}_T| = \frac{|\vec{V}|}{|\vec{V}|} = 1$

$\frac{d}{dt} \vec{u}_T \cdot \vec{u}_T = \frac{d}{dt} 1 = 0$, så $\vec{u}_T \cdot \frac{d}{dt} \vec{u}_T = 0$

$\frac{d}{dt} \vec{u}_T$ gir retningen til normalvektoren:

$$\vec{u}_N = \frac{d}{dt} \vec{u}_T \Big/ \left| \frac{d}{dt} \vec{u}_T \right|.$$

Banefarten er $V(t) = |\vec{V}(t)|$

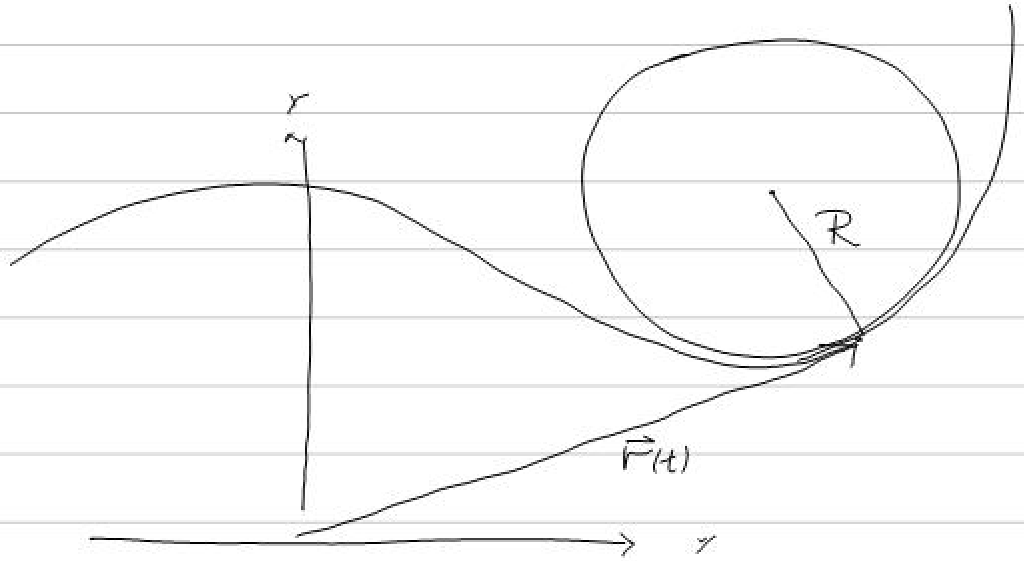
Vi skal syne at akselerasjonen dekomponeres til en tangential komponent (retning $\vec{u}_T$) og en normal komponent (retning $\vec{u}_N$).

$$\vec{a}(t) = \frac{dV}{dt} \vec{u}_T + \frac{V^2}{R} \vec{u}_N$$

hvor $\frac{1}{R} = \frac{\left| \vec{V} \times \frac{d\vec{V}}{dt} \right|}{V^3}$

(tolker dette som $R = \infty$ hvis $\frac{1}{R} = 0$)

$R(t)$ kalles krumningsradien.



R(t) er radiusen til sirkelen som tilnærmer grafen til $\vec{r}(t)$ i nærheten av en gitt t-verdi best.

Bevis: $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{V}(t) = \frac{d}{dt}\, |V(t)| \cdot \frac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|}$

$$= \frac{d}{dt}\,(V(t)\cdot \vec{u}_T)$$

$$= \frac{d}{dt}V(t)\,\vec{u}_T(t) + V(t)\,\frac{d}{dt}\vec{u}(t)$$

$$= \frac{d}{dt}V(t)\,\vec{u}_T(t) + V(t)\left|\frac{d}{dt}\vec{u}(t)\right| \cdot \vec{u}_N(t)$$

Det gjenstår å bestemme $\left|\frac{d}{dt}\vec{u}(t)\right|$.

$$\frac{d}{dt}\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{|\vec{V}|}\frac{d}{dt}\vec{V} + \vec{V}\,\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{\vec{V}\cdot\vec{V}}}$$

$$= \frac{1}{V}\frac{d}{dt}\vec{V} + \vec{V}\;\; -2\vec{V}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt}\Big/ 2(\vec{V}\cdot\vec{V})^{3/2}$$

$$= \frac{1}{V}\frac{d}{dt}\vec{V} - \frac{1}{V}\left(\frac{\vec{V}}{V}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt}\right)\frac{\vec{V}}{V}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{u}_T = \frac{1}{v}\left(\frac{d}{dt}\vec{v} - \left(\vec{u}_T \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\right)\vec{u}_T\right)$$

Dette er komponenten til $\frac{d}{dt}\vec{v}$ som er vinkelrett på enhetsvektoren $\vec{u}_T$.

Absolutt verdien $\left|\frac{d}{dt}\vec{u}_T\right|$ er derfor

$\frac{1}{v} \cdot \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| \cdot \sin\varphi$ hvor φ er vinkelen mellom $\frac{d\vec{v}}{dt}$ og $\vec{u}_T$

Dette kan også uttrykkes ved å bruke kryss-produktet:

$$\left|\frac{d}{dt}\vec{u}_T\right| = \frac{1}{v}\left|\frac{d\vec{v}}{dt} \times u_T\right| = \frac{1}{v}\left|\frac{d\vec{v}}{dt} \times \frac{\vec{v}}{v}\right|$$

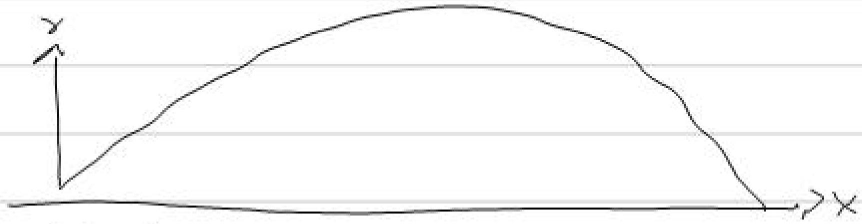
$$= \frac{1}{v^2}\left|\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{v}\right|$$

Vi kan nå beskrive $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{d}{dt}v(t)\right)\vec{u}_T(t) + v(t)\frac{1}{v^2(t)}\left|\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \times \vec{v}(t)\right|\vec{u}_N(t)$$

$$= \frac{d}{dt}v\,\vec{u}_T + v^2\left(\frac{1}{v^3}\left|\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{v}\right|\right)\vec{u}_N$$

Eksempel. Dekomponering av akselerasjonen i tangential- og normal- komponenter for et skrått kast.



$$\vec{r}_0 = \langle 0, 0 \rangle$$

$$\vec{V}_0 = \langle V_{0x}, V_{0y} \rangle. \qquad \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}(t) = \langle 0, -g \rangle$$

konstant.

$$\vec{V}(t) = \langle V_{0x}, V_{0y} - gt \rangle$$

Banefarten er $v(t) = |\vec{V}(t)| = \sqrt{(V_{0x})^2 + (V_{0y} - gt)^2}$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{-g(V_{0y} - gt)}{\sqrt{(V_{0x})^2 + (V_{0y} - gt)^2}}$$

$$\vec{v} \times \frac{d\vec{V}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V_{0x} & V_{0y} & 0 \\ 0 & -g & 0 \end{vmatrix} = \langle 0, 0, -gV_{0x} \rangle$$

så

$$\frac{1}{R} = \frac{g|V_{0x}|}{\left((V_{0x})^2 + (V_{0y} - gt)^2\right)^{3/2}}$$

Krumningsradien $R = \frac{1}{g|V_{0x}|} \left(V_{0,x}^2 + (V_{0,y} - gt)^2\right)^{3/2}$

Vi ser at R er minst når $V_y(t) = V_{0,y} - gt = 0$, den er da $R_{min} = \frac{1}{g} V_{0x}^2$ (uavhengig av $V_{0,y}$ som forventet (Hvorfor?))

$$a_N = v^2 \cdot \frac{1}{R} = g|V_{0x}| \Big/ \sqrt{V_{0,x}^2 + (V_{0,y} - gt)^2}.$$