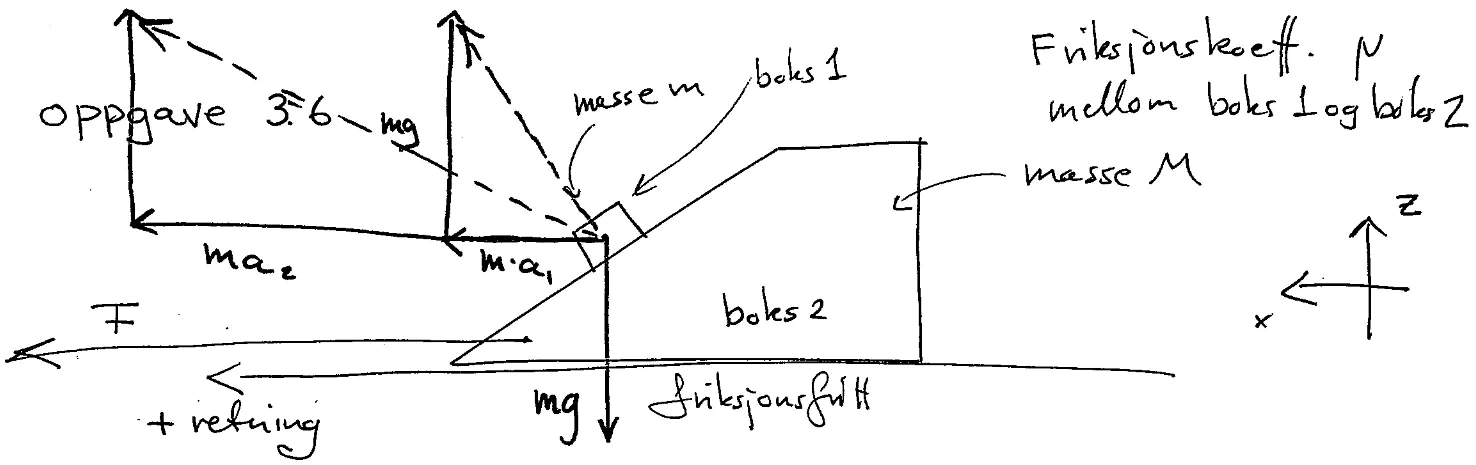
Oppgave 3.6

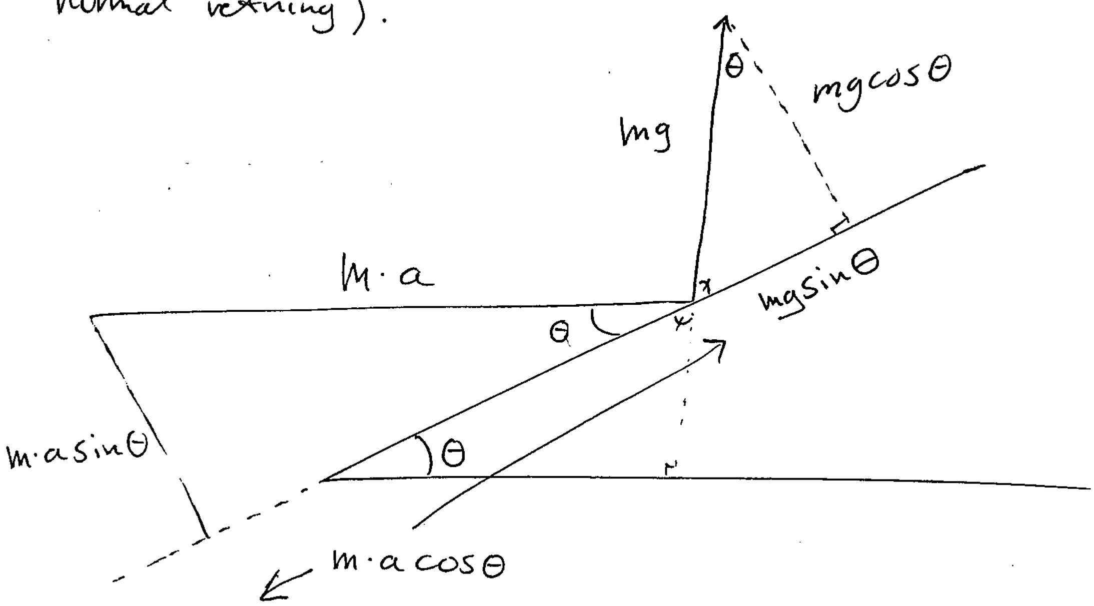


Anta boks 1 ligger i ro på boks 2.

Akselerasjonen til boks 1 og 2 er $a = \frac{F}{m+M}$

Summen av krefter som virker på boks 1 må derfor være $m \cdot a$ (i positiv horisontal retning). Kraften som boks 2 virker på boks 1 med er dermed beskrevet som $[m \cdot a, mg]$. (Stiplett linje i figuren ovenfor. Vi har tegnet opp kraften for to ulike akselerasjoner a_1 og a_2.)

For at boks 1 skal ligge i ro på boks 2 må akselerasjonen i retning skråplanet (tangentiel retning) ikke overskride $\mu \cdot$ (akselerasjon i normal retning).



Vi får derfor at følgend ulikhet må være oppfylt

$$|(m \cdot a\cos\theta - mg\sin\theta)| \leq \mu\,(m \cdot a\sin\theta + mg\cos\theta)$$

for at boks 1 skal ligge i ro på boks 2.

Deler på m. (>0)

$$|a\cos\theta - g\sin\theta| \leq \mu\,(a\sin\theta + g\cos\theta)$$

Så $a\cos\theta - g\sin\theta \leq \mu(a\sin\theta + g\cos\theta)$

og $g\sin\theta - a\cos\theta \leq \mu\,(a\sin\theta + g\cos\theta)$

må begge holde. Vi løser ulikhetene for a i begge tilfellene:

$$a\,(\cos\theta - \mu\sin\theta) \leq \mu g\cos\theta + g\sin\theta$$

$$-a\,(\cos\theta + \mu\sin\theta) \leq \mu g\cos\theta - g\sin\theta$$

$$a \leq g\,\frac{\mu\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta} \quad \text{når} \quad \cos\theta > \mu\sin\theta$$

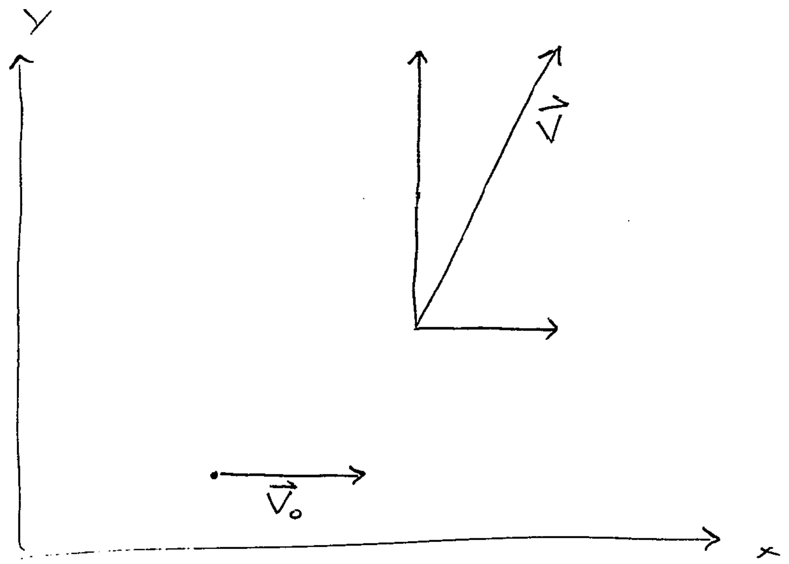
(tom betingelse når $\cos\theta < \mu\sin\theta$ siden $a > 0$)

$$a \geq g\,\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

a) Siden $F = a \cdot (m+M)$ så må kraften F minst være $\underline{(m+M) \cdot g\,\dfrac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}}$ (når $\tan\theta > \mu$ og 0 ellers).

b) $\theta = 90°$ Klossen/boksen faller av hvis $F < \dfrac{(m+M)g}{\mu}$ og klossen blir stående hvis $F \geq \dfrac{(m+M)g}{\mu}$

oppgave 4.2



Kloss med masse $m = 1.5$ kg
glir friksjonsløst på et bord

$\vec{V}_0 = 0.20\,m/s\ \vec{i}$

En kraft $\vec{F}$ med $|\vec{F}| = F = 0.15\,N$ virker i y-retning. Forflyttingen i y-retning mens kraften virker er 0.60m.

a) Arbeidet utført av kraften er

$$W = 0.15\,N \cdot 0.60\,m = \underline{0.090\ Nm}$$

b) Bevaring av energi gir at

$$\frac{1}{2} m (|\vec{V}|^2 - |\vec{V}_0|^2) = W$$

$$|\vec{V}|^2 = \frac{2W}{m} + |\vec{V}_0|^2$$

$$= (0.120 + 0.040)\ m^2/s^2$$

$$= 0.160\ m^2/s^2$$

$$= \underline{0.40\ m/s}$$

4.2 Kraften virker bare i y-retning så $\vec{V}_x = \vec{V}_0$.

Pytagoras : $V_x^2 + V_y^2 = |\vec{V}|^2$

$$V_y^2 = (0.40\,m/s)^2 - (0.20\,m/s)^2$$
$$= (0.160 - 0.040)\,m^2/s^2$$
$$= 0.120\,m^2/s^2$$

(V_y er positiv)

$$V_y = 0.346\ldots\,m/s$$
$$= 0.35\,m/s \quad \text{(gyldige sifter)}$$

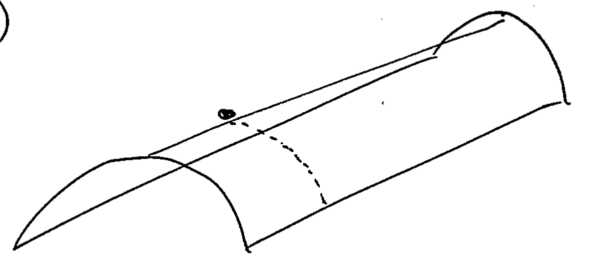
Skalarverdien til farten er $\underline{\underline{|\vec{V}| = 0.40\,m/s}}$

Fartsvektoren er $\vec{V} = 0.20\,m/s\,\vec{i} + 0.35\,m/s\,\vec{j}$

Retningen til fartsvektoren er $\underline{\underline{60^\circ}}$ fra x-aksen mot y-aksen siden $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$

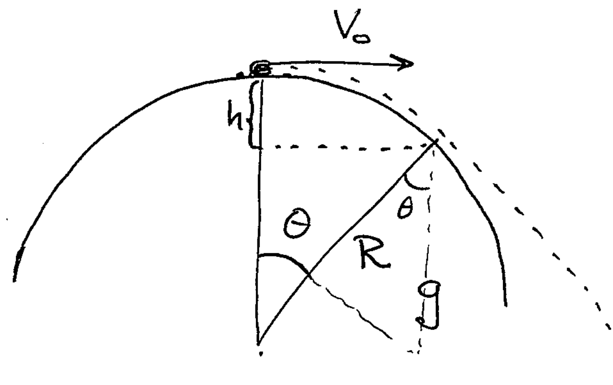
$$= \frac{V_y}{V_x} = \frac{\sqrt{0.12}}{\sqrt{0.04}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

4.6 (side 228)



(Sklir ikkje på skrå ned.)

En punktmasse sklir friksjonsfritt på en sylinder.



Vi skal regne ut kor langt punktmassen sklir på sylinderen før den mister kontakt med sylinderen. Dette skjer når sentripetalakselerasjonen er større enn gravitasjonsakselerasjonen sin komponent i radial retning.

Vi bruker energikonservering til å bestemme farten når punktmassen har sklid ned en vinkel θ fra toppen.

$h = R - R \cdot \cos\theta$ høydeendringen

$\frac{1}{2} m (V^2 - V_0^2) = mg \cdot h = mgR(1-\cos\theta)$

Så $V^2 = V_0^2 + 2gR(1-\cos\theta)$.

Sentripetalakselerasjonen: $\frac{V^2}{R} = \frac{V_0^2}{R} + 2g(1-\cos\theta)$

Gravitasjonsakselerasjonen i radial retning er $g\cos\theta$

Vi finner vinkelen θ hvor disse er like store

$$\frac{V_0^2}{R} + 2g(1-\cos\theta) = g\cos\theta$$

Hvis $\frac{V_0^2}{R} > g$ så er det ingen løsning, punktmassen mister kontakten med sylinderen på toppen $(\theta = 0)$ umiddelbart etter den er satt i bevegelse.

Hvis $V_0^2/R \leq g$ får vi

$$\cos\theta = \frac{1}{3g}\left(\frac{V_0^2}{R} + 2g\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{3g}\left(\frac{V_0^2}{R} + 2g\right)\right)$$

Vinkelen er størst når punktmassen starter med et lite dytt $(V_0 \sim 0)$.

I dette tilfelle er $\cos\theta = \frac{2}{3}$

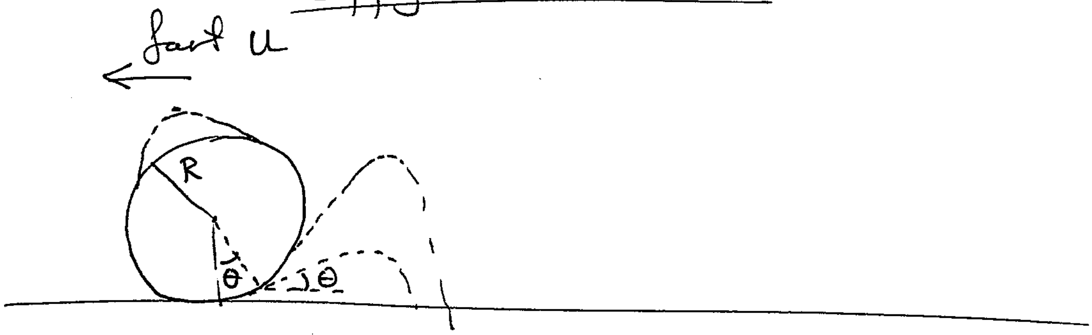
$\theta = 48.2°$ $\left(90 - \theta \cancel{= 41.8°} \sim \underline{\underline{42°}}\right)$

Lengden punktmassen beveger seg før den forlater sylinderen er

$R \cdot \theta$ (vinkelen i radianer)

$= R \cdot \frac{48.2 \cdot \pi}{180} = \underline{0.841 \cdot R}$

Oppgave 5.12



Vi regner ut høyden sølen blir kastet hvis den slipper hjulet ved vinkel θ (fra vertikallinjen).

Vertikal komponenten til farten er $u \cdot \sin\theta$.

Høyden sølen går fra kastpunktet er derfor $\frac{(u \cdot \sin\theta)^2}{2g}$. (~~hvor~~ bevaring av energi).

Høyden ved kastpunktet er $R - R \cdot \cos\theta$.

Total høyde sølen går er derfor

$$H(\theta) = R - R\cos\theta + \frac{u^2}{2g}\sin^2\theta$$

Skriver dette som en likning i $z = \cos\theta$ ved å benytte $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$:

$$H = R - Rz + \frac{u^2}{2g} - \frac{u^2}{2g} z^2 . \qquad \underline{-1 \leq z \leq 1}$$

Ekstremalverdiene til H finner vi ved å se på endepunkt og hvor $H' = 0$.

$H(-1) = 2R$ (toppen av hjulet) $\qquad H(1) = 0$ (ved veien)

$dH/dz = -R - \frac{u^2}{2g} \cdot 2z = 0$ gir $z = \frac{-Rg}{u^2} \geq -1$

(så vinkelen θ ligger mellom $\pi/2$ og π.) $\qquad u^2 \geq Rg$

H-verdien er da $H = R + \frac{R^2 g}{u^2} + \frac{u^2}{2g} - \frac{u^2}{2g}\left(\frac{Rg}{u^2}\right)^2$

$$\underline{H = R + \frac{u^2}{2g} + \frac{R^2 g}{2u^2}}$$

Dette er minst $2R$ for alle $u^2 > gR$

(Det er rimelig å anta, $u^2/R > g$, sentripetal akselerasjonen er større enn gravitasjonsakselerasjonen.)

Hvis $u^2 < gR$ så kommer sølen høyest ved å bli med hjulet til toppunktet $2R$.

Oppgave 6.2

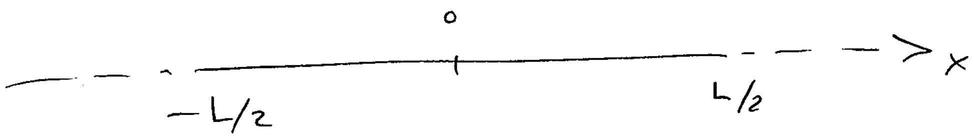
Stav med jevn tykkelse

masse m og lengde L

Massetettheten er $\underline{\rho = \frac{m}{L}}$

a) Treghetsmomentet ~~til~~ om en akse gjennom massesenteret og vinkelrett på staven er $\underline{\underline{\frac{mL^2}{12}}}$

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \underbrace{\frac{dm}{dx}}_{\text{masse-tetthet}} \cdot dx$$



$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot \rho \, dx$$

x^2 er symmetrisk om y-aksen.

$$= 2\int_0^{L/2} x^2 \rho \, dx$$

$$= 2\rho \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{L/2} = \frac{2m}{L} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3$$

$$I = \underline{\underline{\frac{mL^2}{12}}}$$

b) Treghetsmomentet ~~til~~ om en akse gjennom det ene endepunktet og vinkelrett på staven er $\frac{mL^2}{3}$.

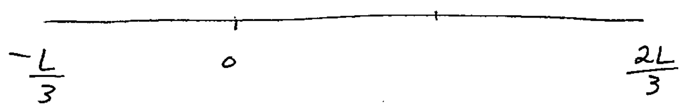
$$I = \int_0^L x^2 \cdot \rho \, dx$$

$$= \rho \left. x^3/3 \right|_0^L$$

$$= \rho \frac{1}{3} \cdot L^3$$

$$I = \frac{mL^3}{3L} = \underline{\underline{\frac{mL^2}{3}}}$$

c) Treghetsmomentet om en akse gjennom staven L/3 fra ene endepunkt og vinkelrett på staven er $\underline{\frac{mL^2}{9}}$



$$I = \int_{-L/3}^{2L/3} x^2 \rho \, dx = \rho \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/3}^{2L/3}$$

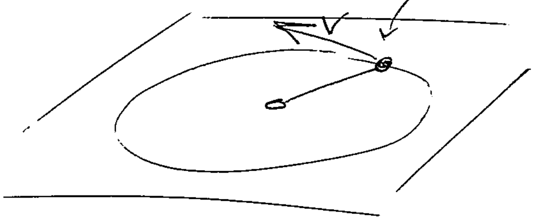
$$= \frac{m}{L} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{2L}{3}\right)^3 - \left(\frac{-L}{3}\right)^3 \right)$$

$$= \frac{m}{3L} \cdot L^3 \left(\frac{8}{27} + \frac{1}{27} \right)$$

$$= \frac{mL^2}{3} \left(\frac{9}{27} \right) = \frac{mL^2}{3 \cdot 3}$$

$$I = \underline{\underline{\frac{m \cdot L^2}{9}}}$$

Oppgave 6.24



legeme med masse $m = 1.5\,kg$

Friksjonsfri bevegelse
masseløs snor . . .

$r_1 = 0.40\,m$

$V_1 = 2.0\,m/s$

Drar i snora til radiusen blir $r_2 = 0.15\,m$

a) Kraftmomentet er $\vec{0}$ siden kraften vi drar med er parallell til radiusen
$(\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0})$

Spinnet er derfor bevart.

Spinnet før $= m \cdot \vec{r} \times \vec{V} = m \cdot r_1 \cdot V_1$

Spinnet etter (vi har dratt) $= m\,\vec{r} \cdot \vec{V} = m \cdot r_2 \cdot V_2$

Så $\quad r_1 \cdot V_1 = r_2 V_2$

$$V_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot V_1$$

$$= \frac{0.40\,m}{0.15\,m} \cdot 2.0\,m/s$$

$$= \underline{5.3\,m/s}$$

b) Arbeidet som er utført er lik endringen i kinetisk energi siden energien er bevart.

$$W = \frac{m}{2}\left(V_2^2 - V_1^2\right) = \frac{1.5\,kg}{2}\left((5.3\,m/s)^2 - (2.0)\,m/s\right.$$

$$= \underline{\underline{18\,Nm}} \qquad \left(\tfrac{55}{3}\right)$$

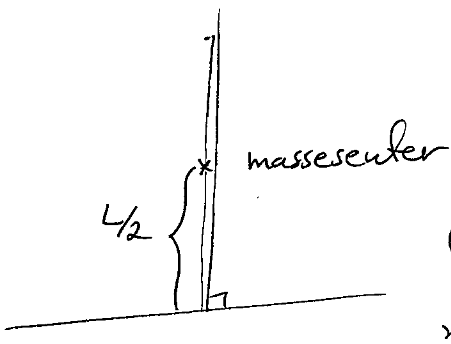
Oppgave 6.17

En stige med lengde L og masse m (jevnfordelt i lengdretning) står inntil en vertikal vegg. Stigen sklir ut. Vi går utfra at friksjonen mellom stigen og golvet og veggen er begge 0.

Kreftene som virker på stigen fra golvet og veggen står derfor vinkelrett på bevegelsen (langs gulvet og veggen) så arbeidet er 0.

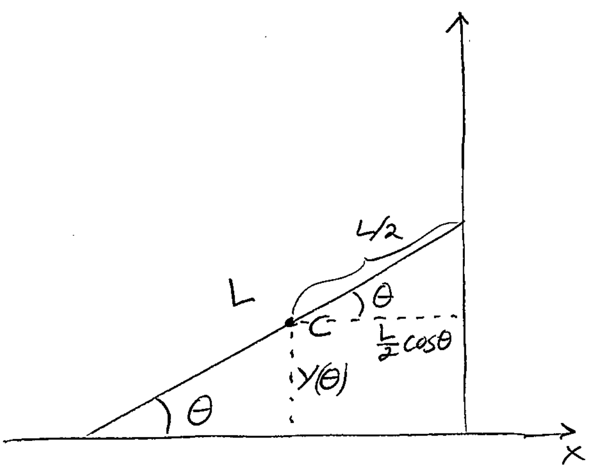
Vi har derfor at summen av potensiell og kinetisk energi er bevart.

Kinetisk energi før stigen begynner å skli:



$$E = \frac{L}{2} \cdot m \cdot g$$

(Vi har valgt pot. energi til å være 0 ved gulvet.)



Høyden til massesenteret er $y(\theta) = \frac{L}{2}\sin\theta$

Vertikal fartskomponent til massesenteret

$$V_{c,y} = \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right)\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$V_{c,y} = \frac{L}{2}\cos\theta \cdot \omega$$

Vinkelfarten $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

Merk at $\omega < 0$ siden θ avtar.

Så lenge stigens topp er inntill veggen

så er $X(\theta) = -\frac{L}{2}\cos\theta$.

Under denne forutsetningen er den horisontale

fartskomponenten $V_{cx} = \frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{L}{2}\cos\theta\right)\cdot\frac{d\theta}{dt}$

$$\underline{V_{cx} = \frac{L}{2}\sin\theta\cdot\omega}$$

Den potensielle energien er $Y(\theta)\cdot gm$.

Energibevaring gir at

$$\frac{L}{2}gm = \frac{1}{2}m\left(V_{cx}^2 + V_{cy}^2\right) + \frac{1}{2}I\cdot\omega^2 + \frac{L}{2}gm\sin\theta$$

hvor $I = \frac{L^2 m}{12}$ er treghetsmomentet til stigen

om massesenteret.

$$\frac{L}{2}gm(1-\sin\theta) = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\omega\right)^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + \frac{\omega^2}{2}\cdot\frac{L^2 m}{12}$$

$$gL(1-\sin\theta) = \frac{L^2}{4}\omega^2\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{L^2}{4}\omega^2\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$g(1-\sin\theta) = \frac{L\omega^2}{3}$$

$$\underline{\omega = -\sqrt{\frac{3g(1-\sin\theta)}{L}}}$$

(minustegn siden $\omega < 0$.)

Dette er gyldig så lenge stigen

er intill veggen

Stigen vil fortsette å være inntil veggen så lenge $\left|\frac{dx_c}{dt}\right| = |V_{cx}| = -V_{cx}$ øker.

Etter dette vil enden av stigen forlate veggen.

$$-V_{cx} = -\frac{L}{2}\sin\theta\left(-\sqrt{\frac{3g}{L}(1-\sin\theta)}\right)$$
$$= \frac{L}{2}\sqrt{\frac{3g}{L}}\sin\theta\cdot\sqrt{1-\sin\theta}$$

$$(-V_{cx})' = -a_{cx}$$
$$= \frac{L}{2}\sqrt{\frac{3g}{L}}\left[(\sin\theta)'\cdot\sqrt{1-\sin\theta} + \sin\theta\cdot\left(\sqrt{1-\sin\theta}\right)'\right]$$
$$= \sqrt{\frac{3gL}{4}}\left[\cos\theta\cdot\sqrt{1-\sin\theta} + \sin\theta\cdot\frac{-\cos\theta}{2\sqrt{1-\sin\theta}}\right]$$
$$= \sqrt{\frac{3gL}{4}}\cos\theta\frac{1}{\sqrt{1-\sin\theta}}\left[\underbrace{1-\sin\theta - \frac{1}{2}\sin\theta}_{1-\frac{3}{2}\sin\theta}\right]$$

Dette er 0 når $\underline{\sin\theta = \frac{2}{3}}$.

Akselerasjonen kan kun være negativ. "Veggen kan skubbe på stigen men ikke holde igjen."

La θ_{fv} være vinkelen mellom 0 og $\frac{\pi}{2}$ slik at

$$\sin\theta_{fv} = \frac{2}{3} \qquad (\theta_{fv} \sim 41.8°)$$

$$V_{fv_x} = V_{cx}(\theta_{fv}) = \sqrt{\frac{3gL}{4}}\sin\theta_{fv}\sqrt{1-\sin\theta_{fv}}$$
$$V_{fv_x} = \sqrt{\frac{3gL}{4}}\,\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$\underline{V_{fv_x} = \frac{\sqrt{gL}}{3}}$$

Hvis $\theta < \theta_{fv}$ vil $V_{cx} = V_{fvx} = \frac{\sqrt{gL}}{3}$.

Energi bevaring gir derfor at:

$$\frac{L}{2} gm (1 - \sin\theta) = \frac{1}{2} m \left(V_{fvx}^2 + \left(\frac{L}{2}\cos\theta \cdot \omega\right)^2 \right) + \frac{I\omega^2}{2}$$

$$gL(1-\sin\theta) - V_{fvx}^2 = \frac{L^2}{4}\cos^2\theta \cdot \omega^2 + \frac{L^2}{12}\omega^2$$

Så
$$\omega^2 = \frac{gL(1-\sin\theta) - gL/9}{(L^2/4)(\cos^2\theta + \frac{1}{3})}$$

$$\omega = -\frac{2}{L}\sqrt{\frac{gL(8/9 - \sin\theta)}{\cos^2\theta + 1/3}} \quad \text{for } \theta \leq \theta_{fv}$$

Vi oppsumerer: Vinkelfarten er

$$\omega = -\sqrt{\frac{3g}{L}\frac{(8/9 - \sin\theta)}{(1+3\cos^2\theta)/4}} \quad \text{for } \theta \leq \theta_{fv}$$

og
$$\omega = -\sqrt{\frac{3g(1-\sin\theta)}{L}} \quad \text{for } \theta \geq \theta_{fv}$$

Når $\theta = 0$ (staven treffer bakken)

så er
$$\omega = \sqrt{\frac{3g(8/9)}{L}} = \underline{2\sqrt{\frac{2g}{3L}}}$$

Farten til toppunktet er da

$$\omega \cdot L = \underline{2\sqrt{\frac{2gL}{3}}}$$