2. mars 09 6 Rotasjonsdynamikk for stive legemer.

Sentrale størrelser

Treghetsmoment enhet $kg \cdot m^2$

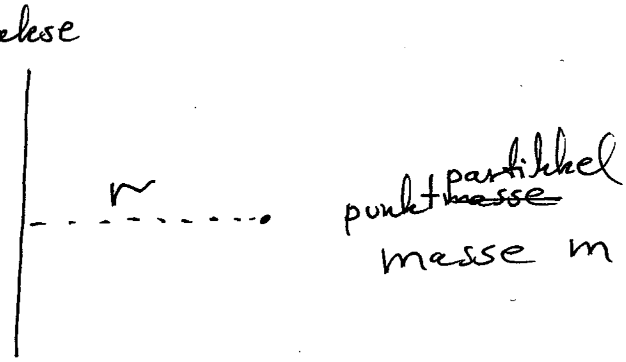
Kraftmoment —"— $kg m^3/s^2 = N \cdot m^2$

Spinn —"— $kg\, m^3/s = (kg\, m/s) \cdot m^2$

6.2–6.5 Fast omdreiningsakse

Definerer treghetsmomentet I til punktpartikkelen om aksen som

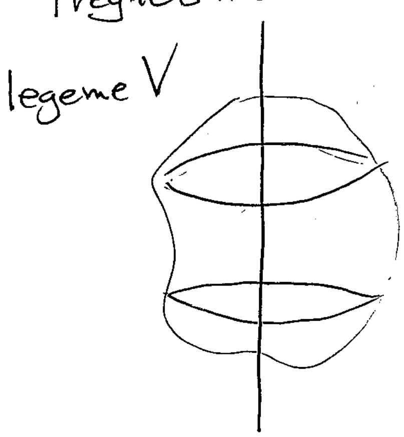
$\underline{m \cdot r^2}$



Kinetisk energi til punktpartikkelen hvis den roterer med vinkelfart ω om aksen er

$$E_k = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \cdot (r \cdot \omega)^2 = \frac{1}{2}(m \cdot r^2) \cdot \omega^2$$
$$= \underline{\frac{1}{2} I \cdot \omega^2}$$

Treghetsmoment til et legeme gitt en rotasjonsakse



Deler legemet opp i mange små biter. Bit i har masse m_i og avstand r_i til aksen.

$$I = \lim_{\substack{\text{oppdelinger} \\ \text{i mindre biter}}} \sum_i m_i r_i^2 = \int_V r^2 \cdot dm$$

$\frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho$ massetetthet

ΔV lite volumelement.

$$I = \int_V r^2 \rho \cdot dV$$

Kinetisk energi til et stivt legeme

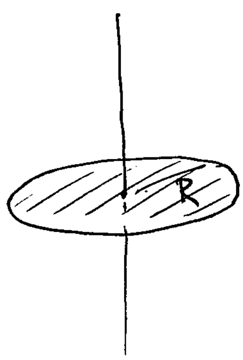
$$E_k = \lim \sum_i \frac{m_i}{2}(r_i \cdot \omega)^2$$
$$= \int \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \, dm = \frac{\omega^2}{2}\int r^2 \, dm$$

$$\underline{E_k = \frac{I}{2}\omega^2}$$

Beregning av noen treghetsmomenter
(tabell på side 274 i boka)
Vi går utfra at massetettheten ρ er konstant.

aksen går gjennom senteret og er vinkelrett på disken.

Masse m



sirkulær disk med radius R

massetettheten $\rho = \frac{m}{\pi \cdot R^2}$

Deler opp disken i sirkel biter

tykkelse Δr

massen er
$\rho \cdot 2\pi \cdot r \cdot \Delta r = \Delta m$

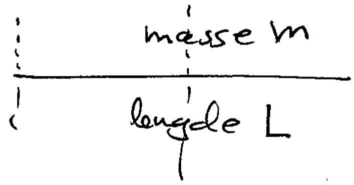
$$I = \int r^2 \, dm$$
$$= \int_0^R r^2 \rho \cdot 2\pi \cdot r \, dr$$

$$I = 2\pi\cdot\rho \int_0^R r^3\,dr$$

$$= 2\pi\rho \,\frac{r^4}{4}\Big|_0^R = 2\pi\rho\cdot\frac{R^4}{4}$$

$$I = \frac{2\cancel{\pi}\cdot m}{\cancel{\pi}\cdot R^2}\cdot\frac{R^4}{4} = \underline{\underline{\frac{m\cdot R^2}{2}}}$$

oppg 6.2 i boken er en del av oblig 2.

Treghetsmoment til 

Plane legemer (ligger i et plan).

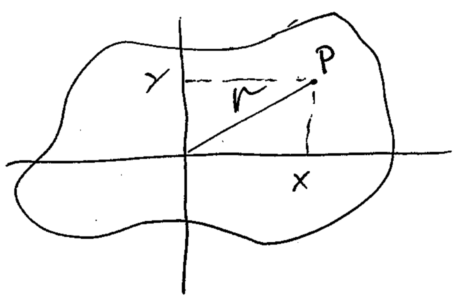
Anta at legemet ligger i x-y planet.

I_z = treghetsmoment til legemet rundt z-aksen

I_x = ——— " ——— x-aksen

I_y = ——— " ——— y-aksen

Resultat: $\boxed{I_z = I_x + I_y}$



$r^2 = x^2 + y^2$ Pytagoras

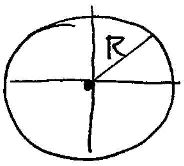
Avstand fra z-aksen til P er r.

Avstand fra x (y) - aksen til P er y (x).

$$I_z = \int r^2\,dm$$

$$= \int x^2 + y^2\,dm = \underbrace{\int x^2\,dm}_{I_y} + \underbrace{\int y^2\,dm}_{I_x}$$

Derfor er $\underline{I_z = I_x + I_y}$.

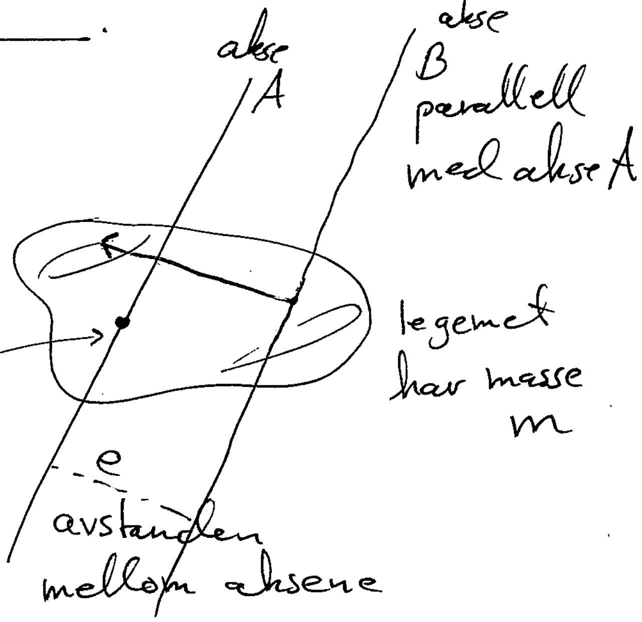


$$I_x = I_y$$

$$I_x + I_y = 2I_x = 2I_y = I_z = \frac{mR^2}{2}$$

Så $\underline{I_x = I_y = \frac{mR^2}{4}}$.

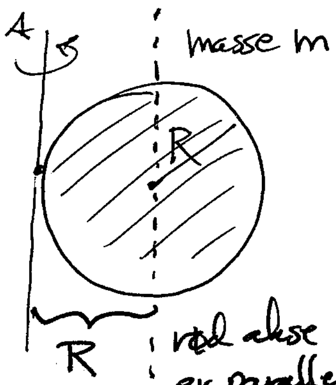
Steiners setning



I_c = treghetsmoment for rotasjon rundt A

I = ——— " ——— B

Da er $\boxed{I = I_c + m \cdot e^2}$



Eksempel

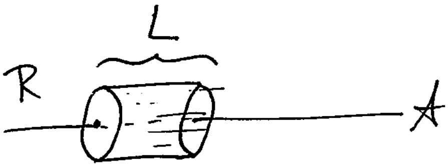
Hva er treghets-momentet ?

Steiners setning gir at treghetsmomentet

$$I = m \cdot R^2 + I_c = m \cdot R^2 + \frac{m \cdot R^2}{4}$$

$$= \underline{\frac{5}{4} m \cdot R^2}$$

radius R



masse m.

Treghetsmoment for rotasjon rundt A er

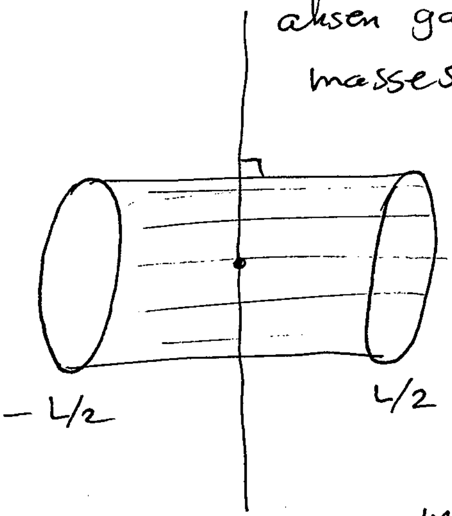
$$I = \frac{mR^2}{2}$$

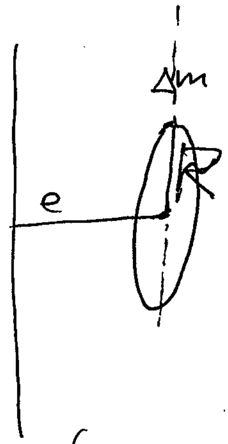
treghetsmoment $\frac{R^2}{2} \cdot \Delta m$

(Deler sylinder opp i mange tynne skiver

summen $I = \frac{R^2}{2} \sum \Delta m_i = \frac{R^2}{2} m$)

aksen går gjennom massesenteret.





treghetsmomentet er $\Delta m \cdot e^2 + \frac{\Delta m R^2}{4}$

(e er variabel)

massetettheten $\frac{m}{L}$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \left(e^2 + \frac{R^2}{4}\right) \frac{m}{L} \cdot de$$

$$= \frac{m}{L}\left[\frac{e^3}{3} + \frac{R^2}{4} \cdot e\right]_{-L/2}^{L/2}$$

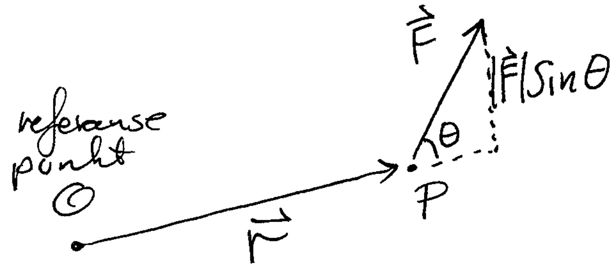
$$= \frac{2 \cdot m}{L}\left(\left(\frac{L}{2}\right)^3 \frac{1}{3} + \frac{R^2}{4} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)\right)$$

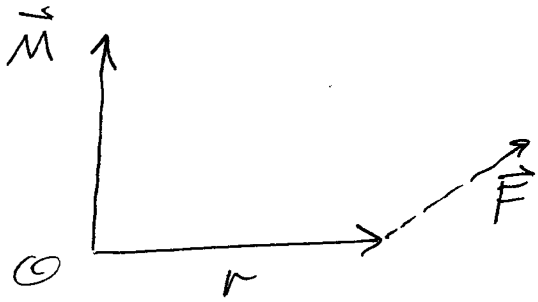
$$= m\left(\frac{L^2}{12} + \frac{R^2}{4}\right)$$

Kraftmoment

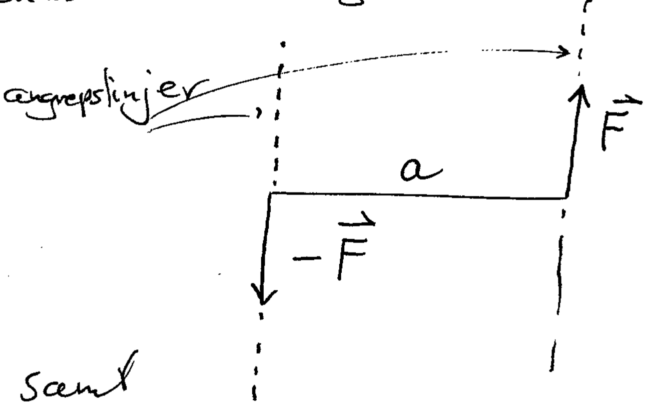
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\theta$$





Merk: Definisjonen bruker ingen akse.

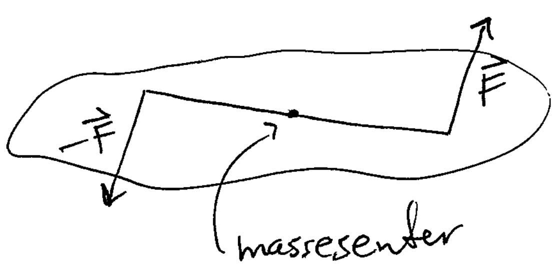


Kraftpar

to motsatt retta og like store krefter, samt avstanden mellom dem.

Kraftmomentet til et kraftpar er uavhengig av referansepunktet O.

$M = a \cdot |\vec{F}|$ eller $M = -a|\vec{F}|$.



Summen av krefter på legemet er $-\vec{F} + \vec{F} = 0$ så massesenteret oppfører seg som om ingen krefter virker på det.