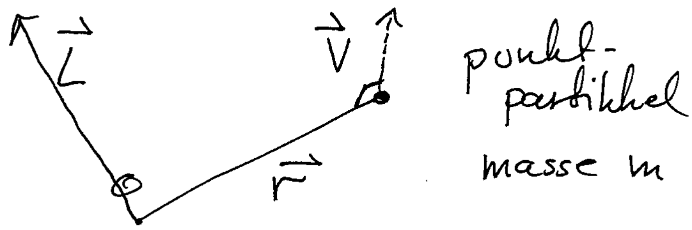
9 mars 09

Spinn

Spinn svarer til bevegelses mengde for rotasjons bevegelser.



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{V} \cdot m$$
$$= \vec{r} \times \vec{p}$$
$$L = |\vec{L}| = r \cdot v \cdot m \cdot \sin\theta$$

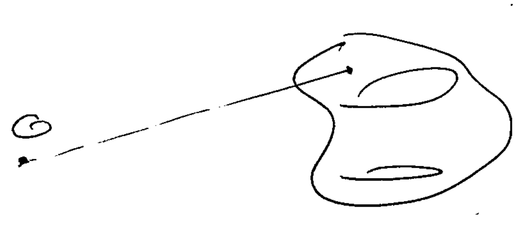
hvor θ er vinkelen mellom $\vec{r}$ og $\vec{V}$.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{(produktregelen)}$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$ farten. Så $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{V} \times \vec{V} \cdot m$
$= \vec{0}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$
$$= \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{siden} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$
$$= \vec{M} \quad \text{kraftmoment.}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$



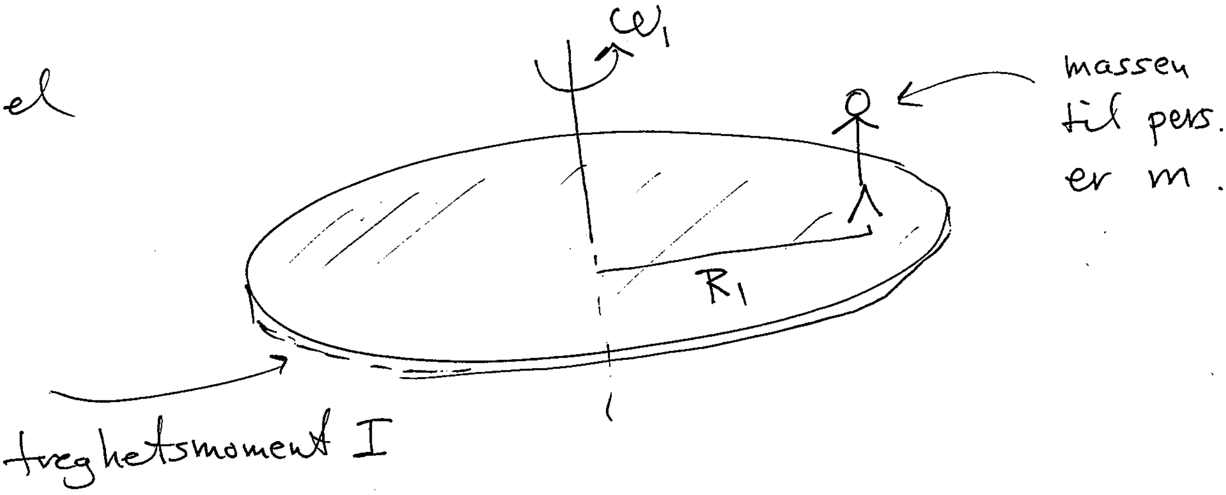
Stivt legeme

Spinnet til legemet er $\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{V}\, dm$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\int \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{V}\, dm}_{\vec{V} \times \vec{V} = 0} + \int \vec{r} \times \frac{d\vec{V}}{dt}\, dm$$
$$= \int \vec{r} \times \vec{a} \cdot dm$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Hvis kraftmomentet på et legeme er $\vec{0}$
så er spinnet bevart.

Eksempel



Personen går innover mot dreieaksen til han er en avstand R_2 fra den.
Hva er vinkelfarten ω_2 då?

Spinn før han går mot sentrum $\quad L_1 = I \cdot \omega_1 + R_1 \cdot R_1 \cdot \omega_1 \cdot m$

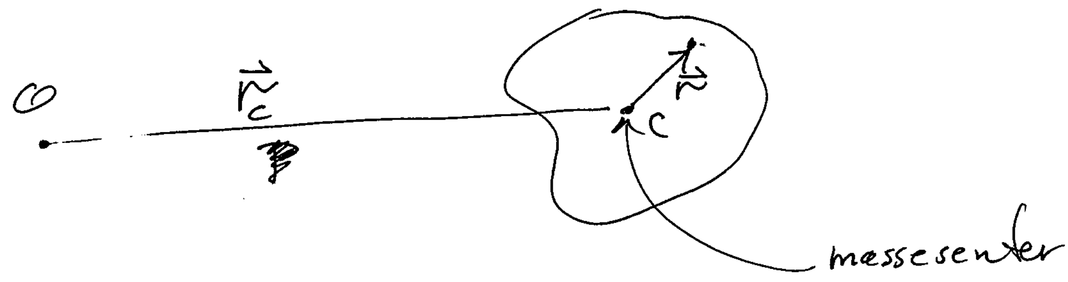
— etter ~~han har gått~~ mot sentrum $\quad L_2 = I \cdot \omega_2 + R_2 \cdot R_2 \cdot \omega_2 \cdot m$

Det virker ikke noe kraftmoment på systemet,
så spinnet er bevart. Så $L_1 = L_2$

$$\omega_2 (I + R_2^2 \cdot m) = \omega_1 (I + R_1^2 \cdot m)$$

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{I + R_1^2 \cdot m}{I + R_2^2 \cdot m} > \omega_1$$

siden $R_2 < R_1$



Spinnet rundt O:

$$\vec{L} = \int (\vec{r}_c + \vec{r}) \times (\vec{r}_c{}' + \vec{r}\,') \, dm$$

$\vec{r}_c{}' = \vec{V}_c$ farten til massesenteret.

$$\vec{L} = \int \vec{r}_c \times \vec{V}_c \, dm + \underbrace{\int \vec{r}_c \times \vec{r}\,' \, dm}_{\vec{r}_c \times \int \vec{r}\,' dm \;=\; \vec{r}_c \times \frac{d}{dt} \underbrace{\int \vec{r} \, dm}_{0}} + \underbrace{\int \vec{r} \times \vec{V}_c \, dm}_{\underbrace{\int \vec{r} \, dm}_{0} \times \vec{V}_c}$$

$$+ \int \vec{r} \times \vec{r}\,' \, dm$$

$$\vec{L} = \vec{r}_c \times \vec{V}_c \cdot m + \vec{L}_c$$

$\vec{L}_c$ spinnet rundt massesenteret c.

$$\vec{L} = \vec{r}_c \times \vec{V}_c \cdot m + \vec{L}_c$$

Spinnet rundt O. — spinnet til massesenteret — spinnet rundt massesenteret

Königs setning

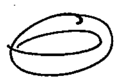
Kinetisk energi til et system

= Kinetisk energi til massesenteret

\+ Kinetisk energi om massesenteret.

(Dette kan ~~også~~ bevises tilsvarende som resultatet ovenfor)

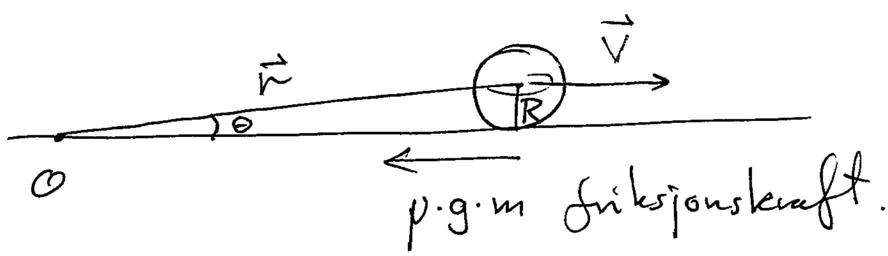
Eksempel



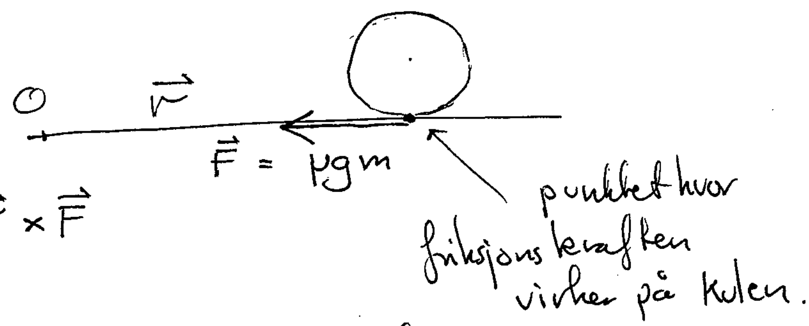
Bowling kule
Radius R
masse m
Friksjonskoeffisienten mellom kula og underlaget er μ.

Kula kastes (uten rotasjon) med fart V_0 i horisontal retning.
Kula sklir i starten, begynner å rotere, etter hvert vil den bare rotere (ikke skli)

1) Hvor fort går kula når den bare roterer
2) Hvor langt går kula før den slutter å skli?



Kraftmomentet er $\vec{O}$



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$= \vec{O}$$

Så spinnet rundt punktet O er bevart.

Spinnet før rotasjonen: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{V} \cdot m$

$$L = m r \cdot v \cdot \sin\theta \quad , \quad \left(r \cdot \sin\theta = R \right)$$

$$\underline{L = m R \cdot V_0}$$

Spinnet etter at kula har sluttet å skli:

$$L = \underbrace{mR\cdot V}_{\text{spinnet til massesenteret}} + \underbrace{I\cdot \omega}_{\text{spinnet om massesenteret.}} \qquad \left(\omega = \frac{V}{R}\right) \quad \left(I = \frac{2}{5}mR^2\right)$$

$$L = mR\cdot V + \frac{2}{5}mR^2\cdot\frac{V}{R}$$

$$= m\cdot RV\left(1+\frac{2}{5}\right) = m\cdot R\cdot V\cdot\frac{7}{5}$$

Spinnet er bevart så

$$\underset{(\text{før})}{m\cdot R\cdot V_0} = \underset{(\text{etter})}{m\cdot R\cdot V\cdot\frac{7}{5}}$$

$$\underline{V = \frac{5}{7}\cdot V_0}$$

Del 2: svar $S = \dfrac{12V_0}{49\mu\cdot g}$

Så lenge kula sklir er kraften $mg\mu$ i horisontal retning mot bevegelsen. Akselerasjonen er da $-g\mu$. Siden den horisontale akselerasjonen er konstant gir bevegelseslikningene for konstant akselerasjon:

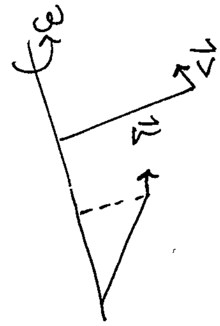
$$V^2 - V_0^2 = 2a\cdot S$$

hvor S er distansen massesenteret har forflyttet seg mens kula skled på underlaget.

$$\left(\left(\frac{5}{7}\right)^2 - 1\right) V_0 = 2\cdot S\cdot(-g\mu)$$

$$S = \frac{V_0(-24/49)}{2(-g\mu)} = \underline{\frac{12V_0}{49g\mu}}$$

Hovedtreghetsakser



$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v}\, dm$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, dm$$

Dette avhenger lineært av $\vec{\omega}$.

$$\vec{L} = \mathbb{I} \cdot \vec{\omega}$$

$\mathbb{I}$ 3x3 matrise (treghetsmatrise - tensor)

$\mathbb{I}^{\text{transp.}} = \mathbb{I}$ symmetrisk.

Det finnes tre vektorer som står vinkelrett på hverandre $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ slik at:

$$\vec{L} = I_1 \cdot \vec{\omega}_1$$

$$\vec{L} = I_2 \vec{\omega}_2$$

$$\vec{L} = I_3 \vec{\omega}_3$$

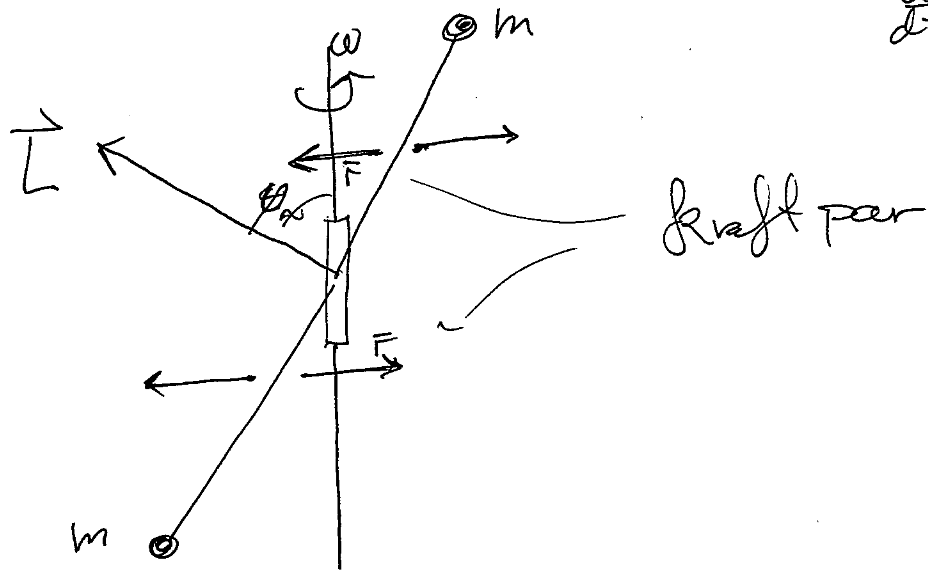
spinnet er parallellt til rotasjonsaksen når rotasjonsaksen er ω_1, ω_2 eller ω_3.

Disse aksene kalles hovedtreghetsakser.

Definer tre akser gjennom massesenteret parallelle med $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$.

Rotasjon rundt hovedtreghetsaksen med minst eller størst treghetsmoment er stabil.

$\frac{d\theta}{dt} = \omega$



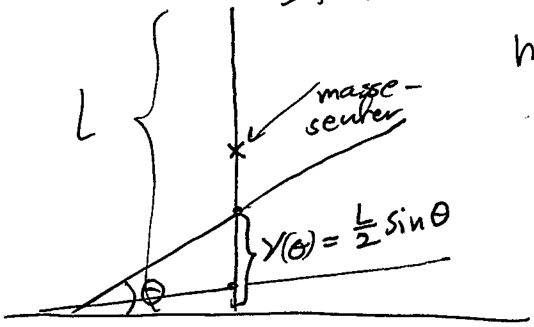
$$\Delta\vec{L} = \vec{M} \cdot \Delta t$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta\theta} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\underline{L \cdot \sin\varphi \cdot \omega = M}$$

oppgave 6.38 Onsdag 11 mars

Stav lengde L
masse m



staven faller.
Anta at det ikke er friksjon mellom staven og underlaget.

Det virker ingen horisontale krefter på staven : massesenteret faller vertikalt ned.

Beskriv vinkelfarten $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ som en funksjon av θ.

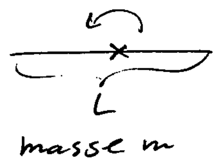
$$E_0 = m \cdot g \cdot \frac{L}{2}$$ energi før fallet.

$$E = m \cdot g \frac{L}{2} \sin\theta + E_{kin}.$$

Königs teorem gir :

$$E_{kin} = \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot \Big(\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\text{farten til massesenteret}}\Big)^2}_{\text{Kinetisk energi til massesenteret}} + \underbrace{\frac{1}{2} I \cdot \omega^2}_{\text{Kinetisk energi til rotasjonsbevegelsen rundt massesenteret}}$$

I : treghetsmomentet



: $\frac{mL^2}{12}$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(+\frac{L}{2}\sin\theta\right) \overset{\text{kjerneregelen}}{=} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right) \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{L}{2}\cos\theta \cdot \omega$$

farten til massesenteret

$$E = mg\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\cos\theta\cdot\omega\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{12}\right)\cdot\omega^2$$

Energien er bevart : $E_0 = E$

$$mg\frac{L}{2} - mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2\cdot\cos^2\theta + \frac{L^2}{12}\right]\omega^2$$

$$mg\frac{L}{2}(1-\sin\theta) = \frac{m\cdot L^2}{2}\cdot\omega^2\left(\frac{\cos^2\theta}{4} + \frac{1}{12}\right)$$

$$g(1-\sin\theta) = \frac{L\cdot\omega^2}{4}\left(\cos^2\theta + 1/3\right)$$

Løser for ω (husk $\omega < 0$)

$$\omega^2 = \frac{4g(1-\sin\theta)/L}{1/3+\cos^2\theta}$$

$$\omega = -\sqrt{\frac{4g(1-\sin\theta)/L}{1/3+\cos^2\theta}} = -\sqrt{\frac{4g(1-\sin\theta)}{L(1/3+\cos^2\theta)}}$$

Vinkelfarten rett før staven treffer bakken $(\theta = 0)$

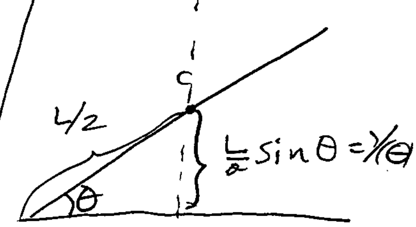
$$\omega = -\sqrt{\frac{4g}{L(1/3+1)}} = -\sqrt{\frac{4g}{L\cdot 4/3}} = -\sqrt{\frac{3g}{L}}$$

Farten til massesenteret i det staven treffer bakken :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{L}{2}\cos\theta\cdot\omega(\theta)$$

$$= \frac{L}{2}\cos\theta\cdot\left(-\sqrt{\frac{4g(1-\sin\theta)/L}{1/3+\cos^2\theta}}\right)$$

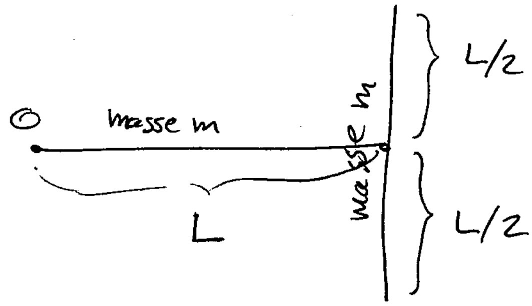
$$= -\sqrt{\frac{gL\cos^2\theta(1-\sin\theta)}{1/3+\cos^2\theta}}$$



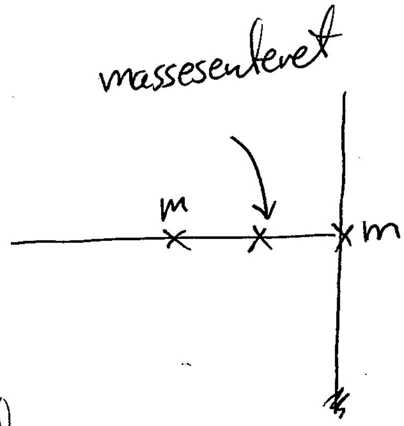
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right)\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$\theta = 0$: $$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{\frac{3gL}{4}}$$

oppg 4 eks 2005

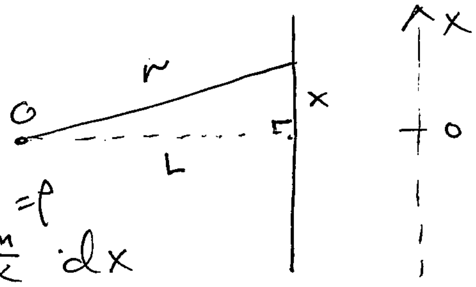


Total masse $M = m + m = 2m$



a) Massesenteret ligger i avstand $\frac{3}{4}L$ fra rotasjons-aksen langs ~~aksen~~ staven som er festa til aksen.

b) Summen av treghetsmomentene til stavene (rundt aksen) er treghetsmomentet I



Første stav : $I_1 = \frac{L^2 \cdot m}{3}$

Andre stav :

$$I_2 = \int r^2 \cdot dm = \int r^2 \underbrace{\frac{dm}{dx}}_{=\rho} \cdot dx$$

$$\rho = \frac{dm}{dx} = \underline{\underline{\frac{m}{L}}}$$

$$= \rho \int_{-L/2}^{L/2} r^2 dx = \rho 2 \int_0^{L/2} r^2 dx$$

Pytagoras : $r^2 = x^2 + L^2$

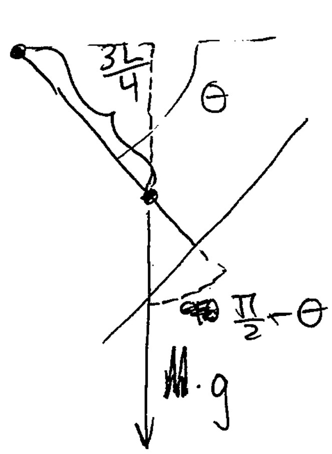
$$I_2 = 2\frac{m}{L} \int_0^{L/2} (x^2 + L^2) dx = \frac{2m}{L}\left[\frac{x^3}{3} + L^2 \cdot x\right]_0^{L/2}$$

$$= \frac{2m}{L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3/3 + L^2 \cdot \frac{L}{2}\right]$$

$$= m\left(\frac{L^2}{4 \cdot 3} + L^2\right) = mL^2\left(\frac{1}{12} + \frac{12}{12}\right) = \underline{\frac{m \cdot L^2 \cdot 13}{12}}$$

Treghetsmomentet $I = I_1 + I_2 = \frac{L^2 \cdot m \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{m \cdot L^2 \cdot 13}{12} = \underline{\underline{\frac{17 m L^2}{12}}}$

Kraftmomentet $|\vec{M}| = I \cdot |\vec{\alpha}|$



$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}|$$

$$= \frac{3L}{4} \cdot Mg \cdot \sin\left(\begin{array}{l}\text{vinkel mellom} \\ \vec{r} \text{ og } \vec{F}\end{array}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\underline{|\vec{M}| = \frac{3L}{4} M \cdot g \cos\theta}$$

$$\alpha = \frac{|\vec{M}|}{I} = \frac{\frac{3L}{4}(2m) \cdot g \cdot \cos\theta}{17mL^2/12}$$

$$\alpha = \frac{3 \cdot 3L \cdot 2\cancel{m} \cdot g\cos\theta}{17\cancel{m} \cdot L^2} = \underline{\frac{18 g\cos\theta}{17 \cdot L}}$$

d) Bruker bevaring av energi

$$E_0 = 0$$

Energien når $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$E = M \cdot g \cdot \left(-\frac{3L}{4}\right) + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

$$E = E_0 = 0$$

$$\frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{+3L \cdot M \cdot g}{4}$$

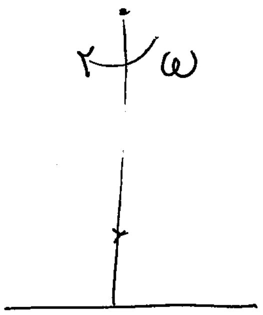
$$\omega^2 = \frac{3L\,M \cdot g}{2 \cdot I} = \frac{3 \cdot L \cdot \cancel{2}\cancel{m} \cdot g}{\cancel{2} \cdot 17\cancel{m}L^2/12}.$$

$$\omega^2 = \frac{36 \cdot g}{17 \cdot L}, \qquad \underline{\omega = 6\sqrt{\frac{g}{17 \cdot L}}}$$

Vinkelfarten $\theta = \pi/2$.

Farten til sveisepunktet når $\theta = \pi/2$

er $V = L \cdot \omega = \underline{\underline{6\sqrt{\frac{gL}{17}}}}$



Kraften nedover:

$$\underline{M \cdot g \quad + \quad M\left(\frac{3}{4}\cdot L\right)\cdot \omega^2}$$

$$2m\cdot g + 2m\,\frac{3}{4}\cancel{L}\cdot\frac{36\cdot g}{17\cdot \cancel{L}}$$

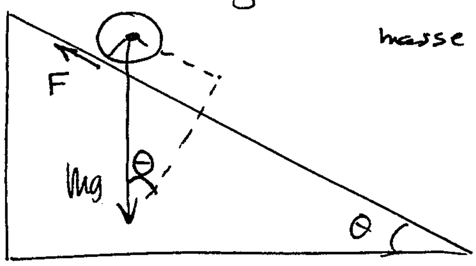
$$2mg\left(1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{36}{17}\right) = 2mg\left(1 + \frac{27}{17}\right)$$

$$= 2mg\left(\frac{17+27}{17}\right) = \underline{\underline{\frac{88\,mg}{17}}}$$

Eksempel

Legeme ruller nedover

masse m



sylinder  $I = \frac{M \cdot R^2}{2}$

kule  $I = \frac{2}{5} M R^2$

sylinderskall (tynn) $I = M \cdot R^2$

Kuleskall $I = \frac{2M}{3} R^2$

(anta friksjonen er så stor at kula ikke sklir)

Hva er akselerasjonen nedover ~~det~~ skrå planet?

$$M = F \cdot R = I \cdot \alpha = I \cdot \frac{a}{R}$$ Kraftmomentet

(rotasjonsaksen er en hovedtreghetsakse i de 4 eksemplene)

$$\Sigma F = mg \sin\theta - F = mg\sin\theta - \frac{I \cdot a}{R^2}$$

$$= m \cdot a \quad \text{(ved Newtons 2. lov)}$$

$$mg\sin\theta = a\left(m + \frac{I}{R^2}\right)$$

så $$a = \frac{g\sin\theta}{1 + I/m \cdot R^2}$$

For eksempel

$$a_{kule}: \quad \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7} g\sin\theta$$

Akselerasjonen a øker hvis treghetsmomentet I avtar.

I eksempelet med de 4 legemene vil kulen akselerere mest og kuleskallet minst.