Mandag 30 mars 09

Elektrisitet & magnetisme

Elektrostatikk

Går utfra at ladningene er (tilnærmet) i ro.

Det finnes positive og negative ladninger.

Elektronet er negativt ladet
Protonet er positivt ladet
} størrelsen på ladningene er like. ~~stor~~

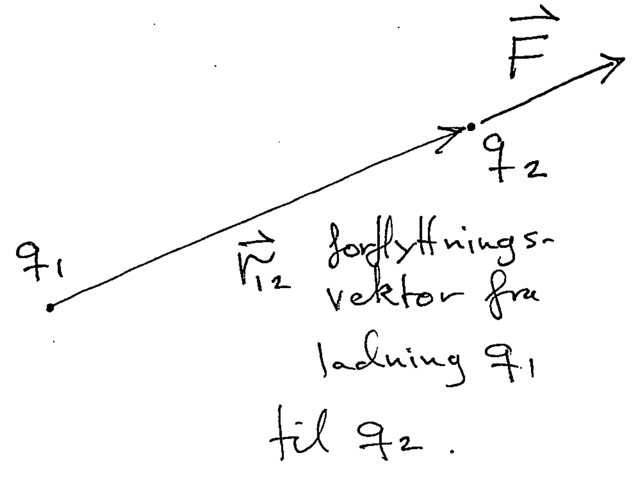
Enheten for elektrisk ladning er Coulomb C
(C = A · s Ampere sekonder)

1 C er en veldig stor ladning.

Elektronet har ladning $-1.60 \cdot 10^{-19}$ C

1 Coulomb er ladningen til $6.24 \cdot 10^{18}$ elektroner.

Coulombs lov



$$\vec{F} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$$

Kraften som q_1 virker på q_2 med.

$$|\vec{F}| = k \frac{|q_1 \cdot q_2|}{|\vec{r}|^2}.$$

I vakum er Coulombs konstant k :

$$k_0 = 8.987742 \cdot 10^9 \ Nm^2/C^2$$
$$\approx 9.0 \cdot 10^9 \ Nm^2/C^2$$

For andre stoff er k mindre enn k_0.

I luft er k nært k_0. Vi bruker k_0 i luft.

I vann er k omtrent $\frac{1}{80} \cdot k_0$

$$k_{vann} \approx \frac{1}{80} k_0$$

Det er vanlig å skrive k som $\frac{1}{4\pi\epsilon}$

$$k = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon}.$$
$$k_0 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$$

ϵ kalles Permittiviteten

$$\frac{k_0}{k} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = K$$ Dielektrisitets konstanten

typisk $1 < K < 100$

Coulombs lov (på nytt)

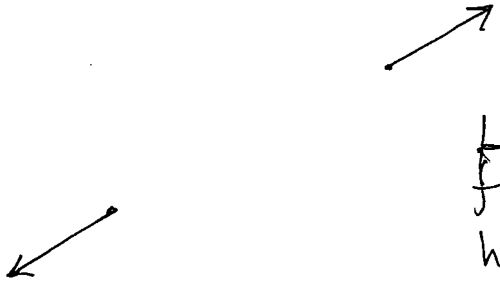
$$\vec{F} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$|\vec{F}| = \frac{|q_1 \cdot q_2|}{\epsilon} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot |r|^2}$$

overflatearealet til en sfære med radius r.

Samme fortegn
på ladningene

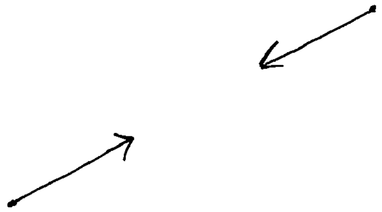
$q_1 \cdot q_2 > 0$



Ladningene
frastøter
hverandre

Motsatt fortegn
på ladningene

$q_1 \cdot q_2 < 0$



tiltrekker
ladningene
hverandre

Hva er forholdet mellom ladning og masse for at gravitasjonskraften og elektrisk kraft skal være like store (anta samme forhold på punktpartiklene). La q/m være forholdet mellom ladning og masse.

$$|\vec{F}_g| = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad |\vec{F}_c| = k_0 \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2}$$

$$\left|\frac{|\vec{F}_g|}{|\vec{F}_c|}\right| = \frac{G\, m_1 \cdot m_2 / r^2}{k_0\, |q_1 \cdot q_2| / r^2} = \frac{G}{k_0}\left| \underbrace{\left(\frac{m_1}{q_1}\right) \cdot \left(\frac{m_2}{q_2}\right)}_{\text{antar at forholdene er lik.}} \right|$$

$\underline{|\vec{F}_g| = |\vec{F}_c|}$ når $1 = \frac{G}{k_0}\left(m/q\right)^2$

$$(q/m)^2 = G/k_0$$

$$q/m = \sqrt{G/k_0} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11}}{9 \cdot 10^{9}}} \approx \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 10^{-20}}$$

$$\underline{\approx \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 10^{-10}\ C/kg}$$

Anta at begge massene er 1 kg, $m_1 = m_2 = 1\,\text{kg}$.

$$q_1 = q_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 10^{-10}\ \text{C}$$

$$F_g = F_c = \frac{k_0}{r^2} \cdot q_1 \cdot q_2 = \frac{1}{r^2}\, 9 \cdot 10^{+9}\ \text{Nm}^2/\text{C}^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10^{-20}\ \text{C}^2$$

$$= \underline{\frac{1}{r^2}\, 6 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2}$$

I praksis er det tilstrekkelig å enten se på gravitasjonskrefter (stor masse) eller elektriske krefter (liten masse).

$r = 1\,\text{m}$. Hva må q være?

$$F = k\,\frac{|q \cdot q|}{r^2}$$

$$q^2 = \frac{F \cdot r^2}{k}$$

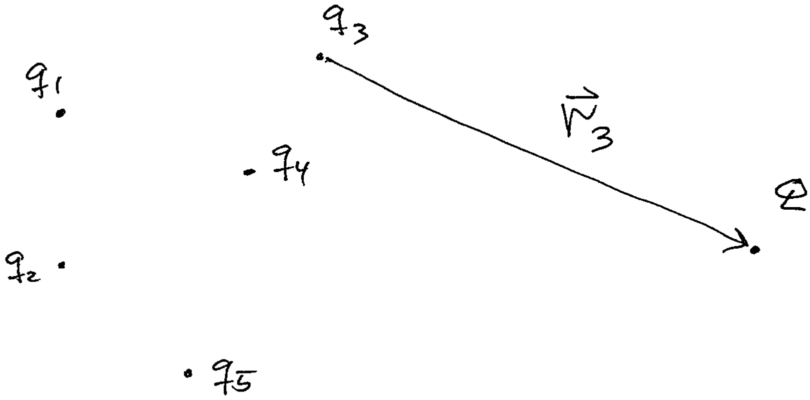
$$q = \sqrt{\frac{F}{k}} \cdot r \quad \text{eller} \quad q = -\sqrt{\frac{F}{k}} \cdot r$$

$$q = \pm \sqrt{\frac{1\,\text{N}}{9 \cdot 10^{9}\ \text{Nm}^2/\text{C}^2}} \cdot 1\,\text{m}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{0.9} \cdot 10^{-10}}\ \text{C}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{0.9}}\, (10^{-10})^{1/2}\ \text{C}$$

$$= \pm \sqrt{1.1} \cdot 10^{-5}\ \text{C} \approx \underline{\pm 1.05 \cdot 10^{-5}\ \text{C}}$$

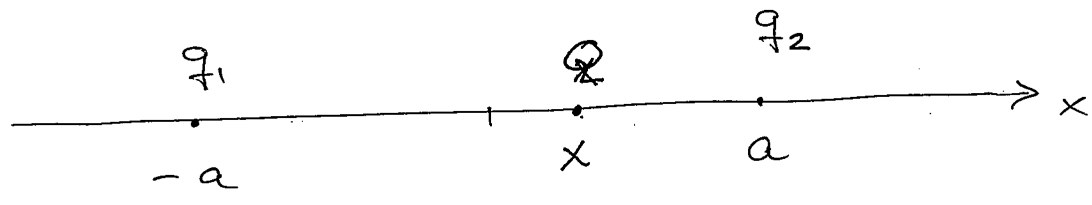


Addisjonsprinsipp.

De elektriske kreftene som virker på Q er summen av de elektriske kreftene mellom Q og hver av ladningene.

$$\vec{F} = \sum_{\text{ladningene}} k \frac{Q \cdot q_i}{|\vec{r}_i|^3} \vec{r}_i .$$

Eksempler



Elektrisk kraft som virker på en ladning Q i punktet x :

$$F = kQ \left[\frac{q_2 (x-a)}{|x-a|^3} + \frac{q_1 (x+a)}{|x+a|^3} \right]$$

$x \neq \pm a$.

Anta $q_1 = q_2 = q$

$$F = k \cdot Q \cdot q \left(\frac{x-a}{|x-a|^3} + \frac{x+a}{|x+a|^3} \right).$$

Når $x = 0$ (midt mellom ladningene)

$$F = k \cdot Q \cdot q \left(\frac{-a}{a^3} + \frac{a}{a^3} \right) = 0.$$

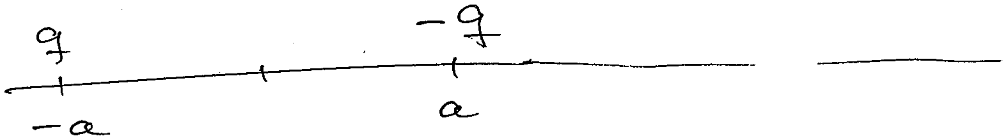
Anta $x \gg a$ (for eksempel $\left|\frac{x}{a}\right| \gtrsim 100$)

$$F \cong k \cdot Q \cdot q \left(\frac{x}{|x|^3} + \frac{x}{|x|^3} \right) = k \cdot Q \cdot q \, \frac{2x}{|x|^3}.$$

$$= k \, \frac{Q(2q)\, x}{|x|^3}.$$

Kraften er tilnærmet den samme som fra en punkt partikkel i origo med ladning $q_1 + q_2 = 2q$.

Anta $q_1 = q = -q_2$ motsatt ladning



Anta $x \gg a$.

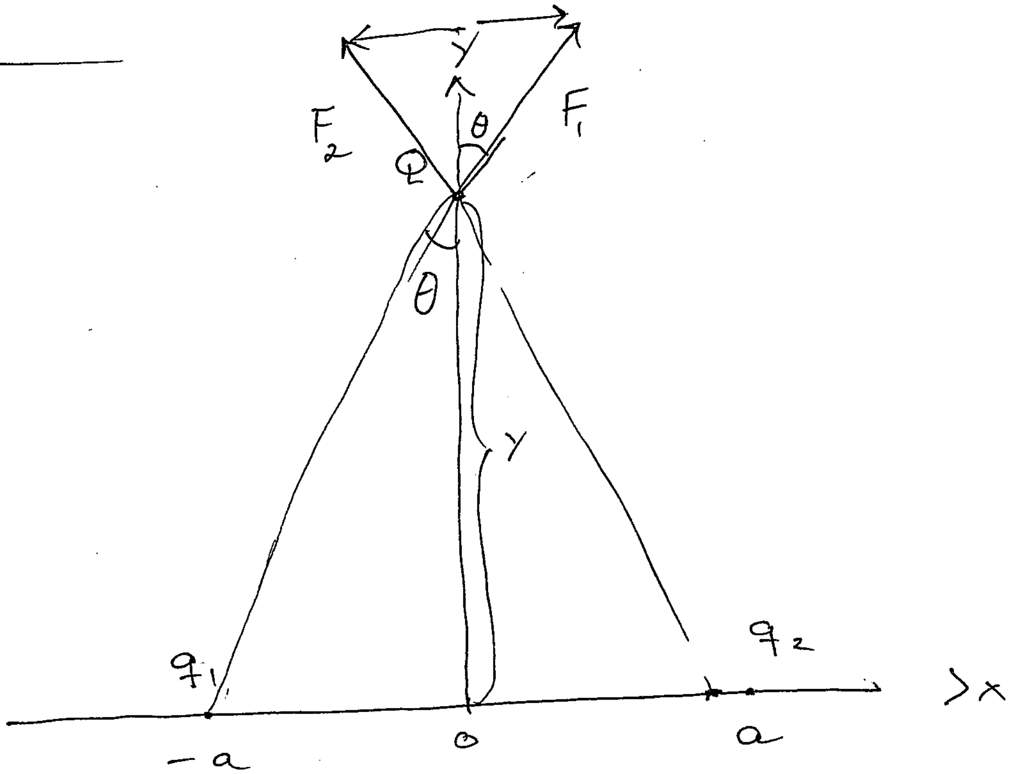
$$F = k \cdot Q q \left[\frac{x-a}{|x-a|^3} - \frac{x+a}{|x+a|^3} \right]$$

$$= \frac{k \cdot Q \cdot q}{|x|^3} \left[\frac{x-a}{|1-\frac{a}{x}|^3} - \frac{x+a}{|1+\frac{a}{x}|^3} \right]$$

$$= \frac{k \cdot Q \cdot q\, x}{|x|^3} \left[\left(1 - \frac{a}{x}\right)\left(1 + \frac{3a}{x}\right) - \left(1 + \frac{a}{x}\right)\left(1 - \frac{3a}{x}\right) \right]$$

$$= \frac{k \cdot Q \cdot q\, x}{|x|^3} \Big[\underbrace{\frac{2a}{x} - \left(-\frac{2a}{x}\right)}_{\frac{4a}{x}} + \text{h.o. ledd} \Big]$$

$$= \frac{k \cdot Q \cdot q}{|x|^3} \cdot 4a \quad \text{opp til fortegn.}$$



$q_1 = q_2 = q$ Hva er kreftene som virker på Q fra q_1 og q_2.

$$F = k\, Q\, q \left[\frac{1}{a^2+y^2} \cdot \overbrace{\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}}^{\cos\theta} + \frac{1}{a^2+y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} \right]$$

$$= \frac{k \cdot Q \cdot q}{(a^2+y^2)^{3/2}} \cdot 2y$$

Hvis y/a blir veldig stor så er dette tilnærmet

$$\frac{k\, Q\, (2q)}{|y|^3}\, y$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad |x| < 1$$

Geometriske rekke

$$\frac{1}{0{,}9} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$$

$$= 1{,}11111\ldots$$

$$\sqrt{1{,}1} \simeq 1{,}05$$

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{\left|1-\frac{a}{x}\right|^3} = \frac{1}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^3} = \left(1 + \frac{a}{x} + \text{h.o.l}\right)^3$$

$$= 1 + \frac{3a}{x} + \text{h.o.l.}$$