1 april 09

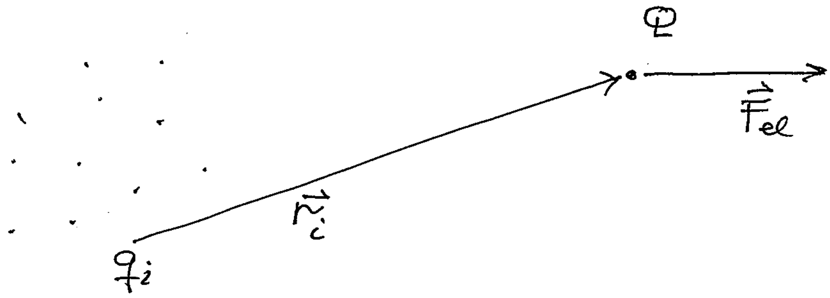
Elektriske felt

$|\vec{r}| = r$

Coulombs lov

$$\vec{F} = \underbrace{\left(k \frac{q}{r^3} \vec{r}\right)}_{\vec{E}} \cdot Q$$

Addisjonsprinsippet



$$\vec{F}_{el} = \underbrace{\left(\Sigma_i \; k \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i\right)}_{\vec{E}} \cdot Q$$

$|\vec{F}_{el}|$ er proporsjonal til Q

Elektrisk feltstyrke i et punkt P

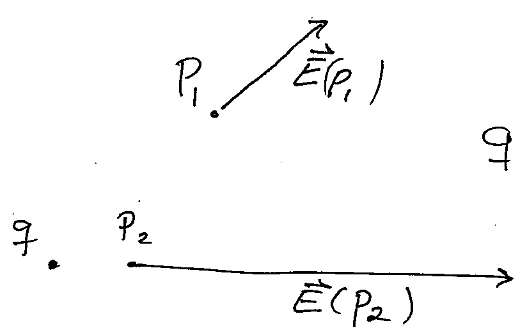
er $\vec{E} = \lim_{Q \to 0} \frac{\vec{F}(p)}{Q}$

(Lar $Q \to 0$ slik at vi kan se bort fra påvirkning av ladning Q på systemet.)

Enheten til $\vec{E}$, elektrisk felt, er N/C.

Hvordan kan man tegne opp vektorfelt?

Tegne inn noen utvalgte vektorer med start i punktet de tilhører

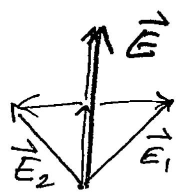


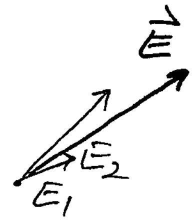
$q > 0$

Hvis vi følger vektoren i vektorfeltet får vi kurver. Slike kurver kalles feltlinjer (de har retning).

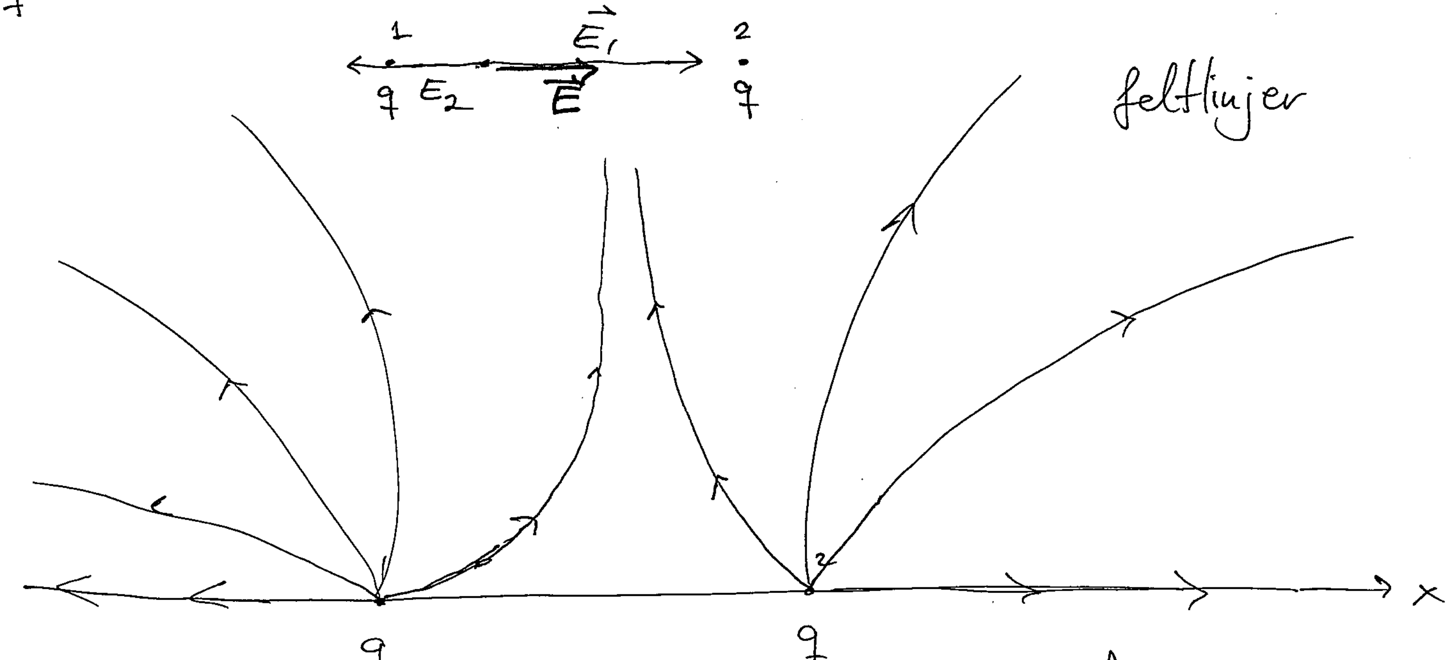
Elektriske felt følger også addisjonsprinsippet

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}$$

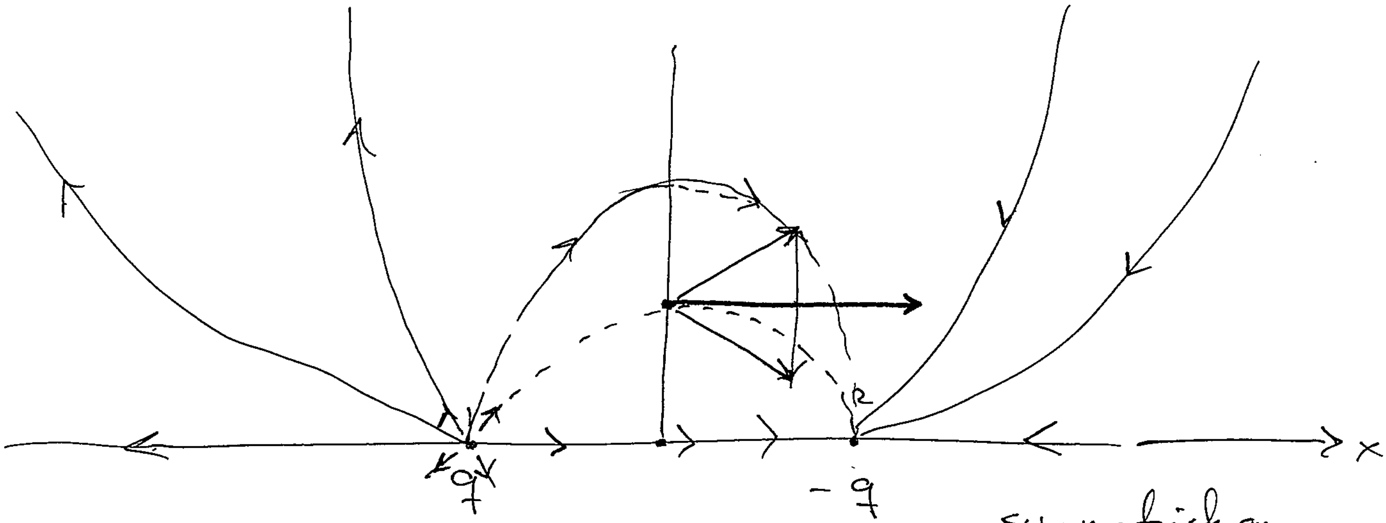




q>0



symmetrisk om x-aksen



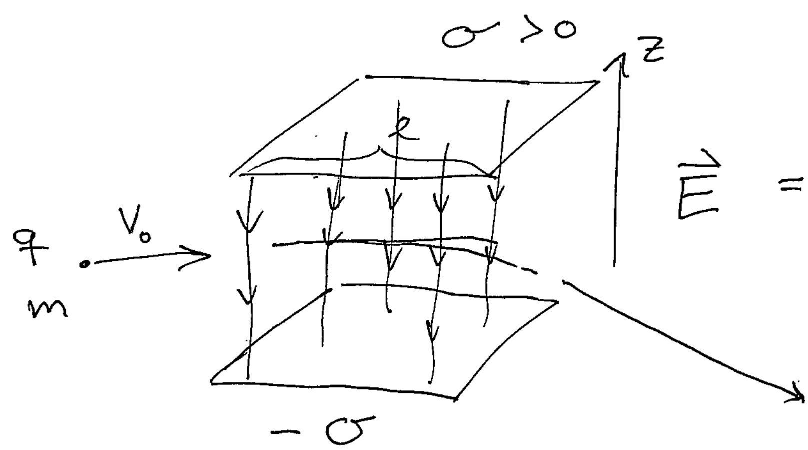
symmetrisk om x-aksen.

En ladd partikkel i et el. felt vil typisk ikke bevege seg langs felt linjer.

$$\vec{F} = q\cdot\vec{E} \qquad \vec{F} = m\cdot\vec{a}$$

$$m\cdot\vec{a} = q\cdot\vec{E} \quad \text{så} \quad \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

σ ladningstetthet C/m^2



$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon}$ konstant i negativ z-retning.

$q > 0$

Hva er vinkelen mellom horisontal planet og fartsvektoren etter at partikkelen forlater feltet?

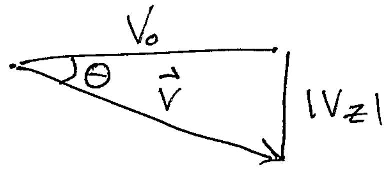
Akselerasjonen: $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} = \frac{q}{m}\cdot\frac{\sigma}{\epsilon}(-\vec{k})$

Hvor lenge er partikkelen i feltet?

$$T = \frac{l}{V_0}$$

$$V_z = \left(-\frac{q}{m}\frac{\sigma}{\epsilon}\right) \cdot T$$

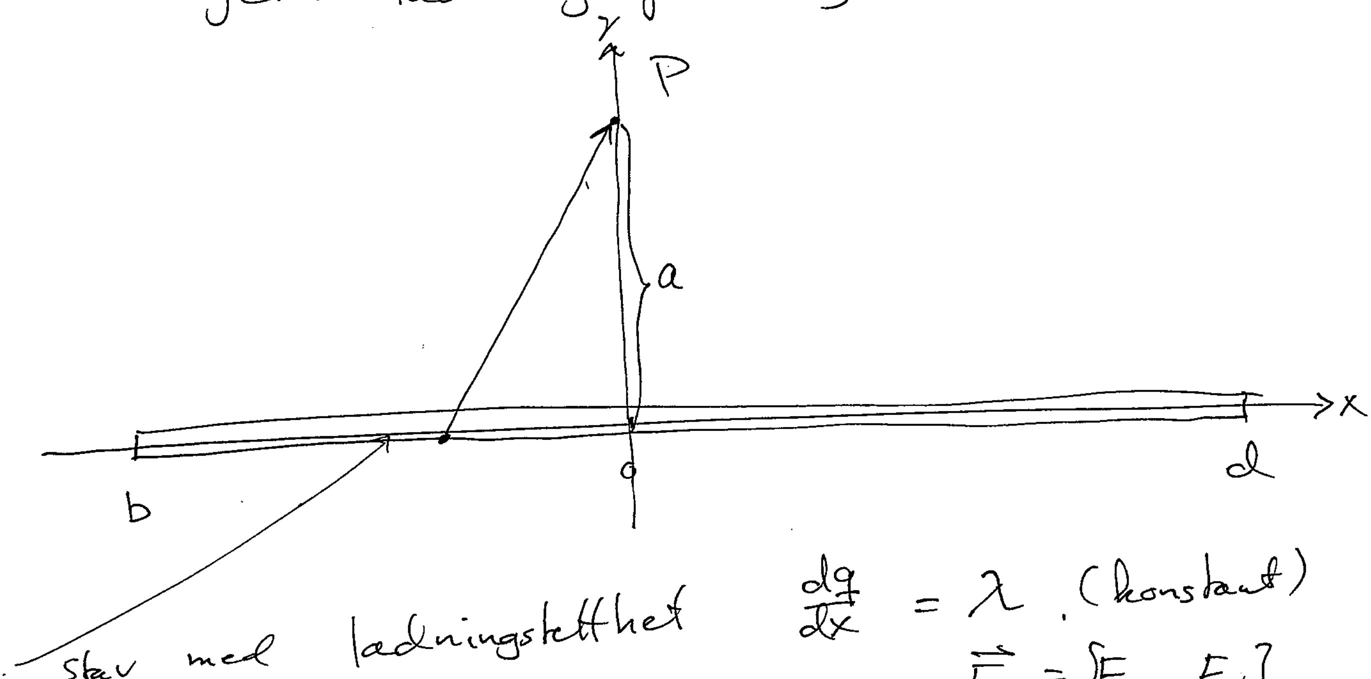
er den vertikale komponenten til farten etter at partikkelen har forlatt feltet.



$$\tan\theta = \frac{|q|\sigma \cdot T/m\epsilon}{V_0} = \frac{|q|\sigma\, l}{m\epsilon\, V_0^2}$$

$$\underline{\theta = \arctan\left(\frac{|q|\sigma\, l}{\epsilon\, m\, V_0^2}\right)}.$$

Elektrisk felt fra en stav med jevn ladnings fordeling



ladningstetthet $\frac{dq}{dx} = \lambda$ (konstant)

Det elektriske feltet i P : $\vec{E} = [E_x, E_y]$

$$\vec{E} = \int_b^d k \frac{[-x, a]}{(x^2+a^2)^{3/2}} \lambda \, dx$$

evaluering av integralet gir :

$$E_x = k\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{d^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}} \right)$$

$$E_y = \frac{k\lambda}{a} \left(\frac{d}{\sqrt{d^2+a^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

La $-b = d > 0$

Da er $E_x = 0$

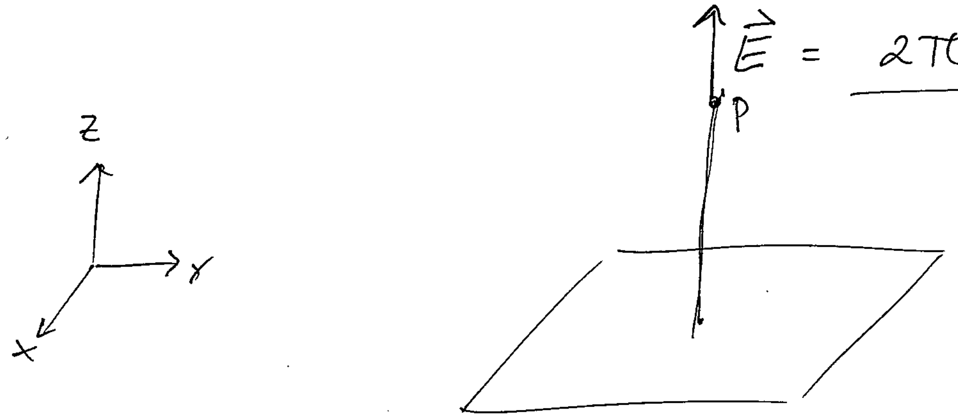
$$E_y = \frac{2k\lambda}{a} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2+a^2}}.$$

Hvis $-b = d$ og $d \gg a$ (lang stav)

så er $\underline{\underline{\vec{E} = \left[0, \frac{2k\lambda}{a}\right]}}$

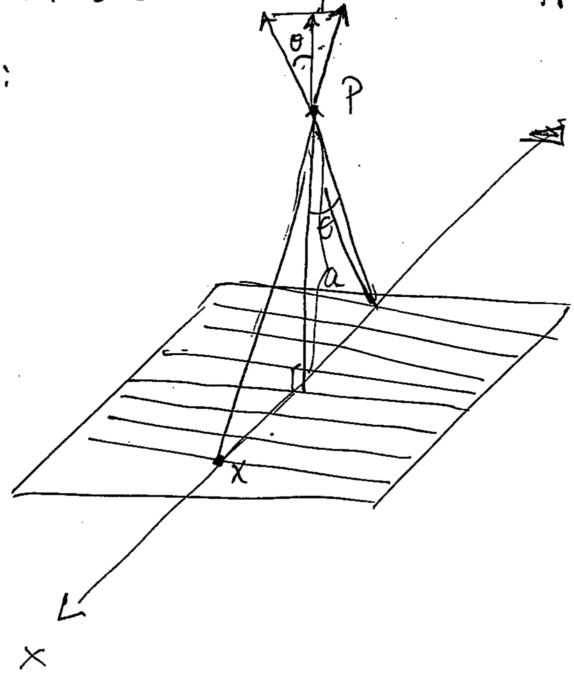
Vi bruker dette til å regne ut det elektriske feltet til et plan med konstant ladningstetthet.

$$\vec{E} = 2\pi k \cdot \sigma \ \vec{k}$$



Ladningstetthet σ
vilkårlig stor flate.

(Tenker oss at) vi deler plata opp i mange tynne staver:



$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Ser bare på vertikalkomponentene av det elektriske feltet til stavene. (Horisontal komponentene kanselleres)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2k}{\sqrt{x^2+a^2}} \cdot \cos\theta \cdot \overbrace{\sigma \, dx}^{\lambda \text{ for en tynn stav}}$$

setter inn $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2k \cdot a\sigma}{x^2+a^2} \, dx$$

$$= 2k\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+x^2} \, dx = 2k\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \frac{1}{a} \, dx$$

La $z = \frac{x}{a}$, merk at $\lim_{x \to \pm\infty} z = \pm\infty$.

$$dz = \frac{1}{a}\,dx$$

$$E = 2k\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^2}\,dz$$

$$= 2k\sigma \quad \arctan z \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

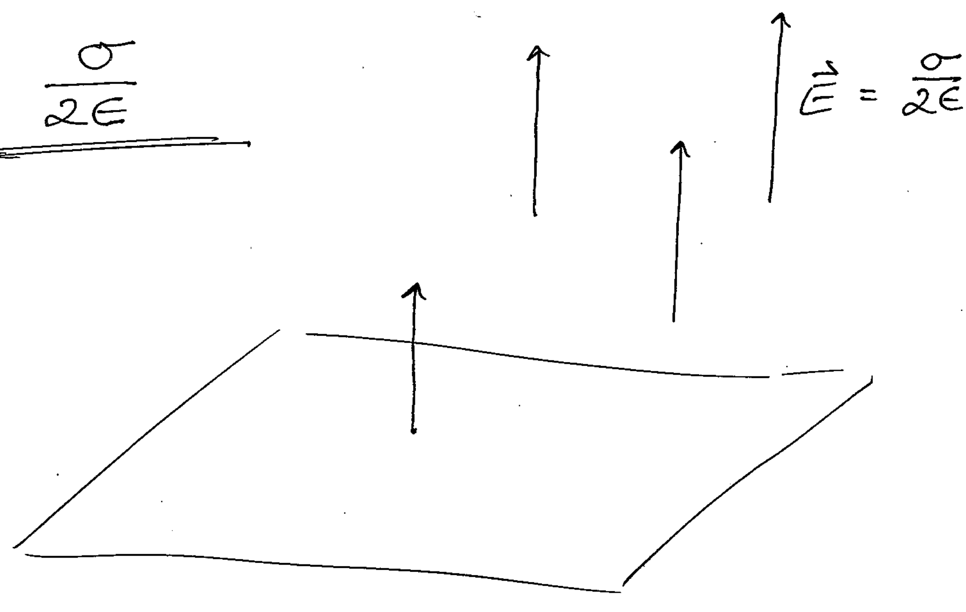
$$= 2k\sigma \Big[\underbrace{\lim_{N\to\infty} \arctan N}_{\pi/2} - \underbrace{\lim_{N\to -\infty} \arctan N}_{-\pi/2} \Big]$$

$$= 2k\sigma \cdot \pi$$

$$= 2\pi k \sigma$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{4\pi\epsilon}\right) \sigma$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon}$$



Tillegg (Ikke pensum.)

Utledning av vektorfeltet til en stang med jevn ladning. $a > 0$ er avstand til stangen

$$E_x = k\lambda \int_b^d \frac{-x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx$$

Vi prøver med substitusjon med $u = x^2 + a^2$.

$$du = 2x\,dx$$

$$k\lambda \int \frac{-\frac{1}{2}\,du}{u^{3/2}}$$

$$= k\lambda \cdot \int \left(-\tfrac{1}{2}\right) u^{-3/2}\,du = k\lambda\, u^{-1/2} + c$$

Så $$E_x = k\lambda\left[\frac{1}{(d^2+a^2)^{1/2}} - \frac{1}{(b^2+a^2)^{3/2}}\right]$$

$$E_y = k\lambda \int_b^d \frac{a}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx = k\lambda \int_b^d \frac{1}{a\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{3/2}}\,\frac{dx}{a}$$

La $z = \frac{x}{a}$ $\quad dz = \frac{dx}{a}$

$$E_y = \frac{k\lambda}{a}\int_{b/a}^{d/a} \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}}\,dz$$

Evaluerer $\int \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}}\,dz$.

Hyperbolsk trigonometrisk substitusjon

La $z = \sinh x$

$dz = \cosh x \cdot x$

$$\int \frac{1}{(1+\sinh^2 x)^{3/2}} \cosh x\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\cosh^3 x}\cdot \cosh x\,dx = \int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx$$

$$= \cancel{\coth}\, x + c = \frac{\sinh x}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} + c$$

tanh

$$= \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} + c$$

(Alternativt: 1) prøv med delvis integrasjon av

$$\int z^2 (1+z^2)^{-3/2} \, dz = \int \overset{u}{z} \cdot \overbrace{\left(z \cdot (1+z^2)^{-3/2}\right)}^{v'} dz$$

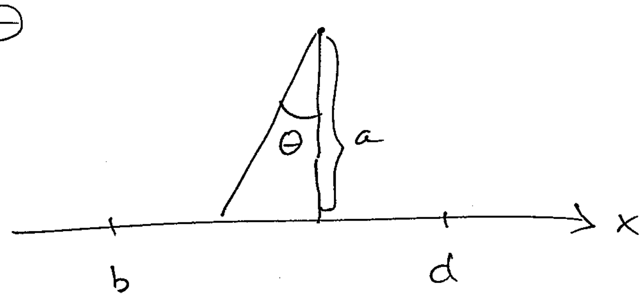
$$= z \cdot \frac{-1}{(1+z^2)^{1/2}} + \int 1 \cdot \frac{1}{(1+z^2)^{1/2}} \, dz$$

$$= \frac{-z}{(1+z^2)^{1/2}} + \int \frac{1+z^2}{(1+z^2)^{3/2}} \, dz$$

$$= \frac{-z}{(1+z^2)^{1/2}} + \int (1+z^2)^{-3/2} dz + \int z^2 (1+z^2)^{-3/2} dz$$

Eller 2) bruk variabelen Θ

$a > 0$



Dette gir det enkleste integralene ...)

$$E_y = \frac{k\lambda}{a} \int_{b/a}^{d/a} \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}} \, dz = \frac{k\lambda}{a} \left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right) \Bigg|_{b/a}^{d/a}$$

$$= \underline{\frac{k\lambda}{a} \left[\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right]}.$$