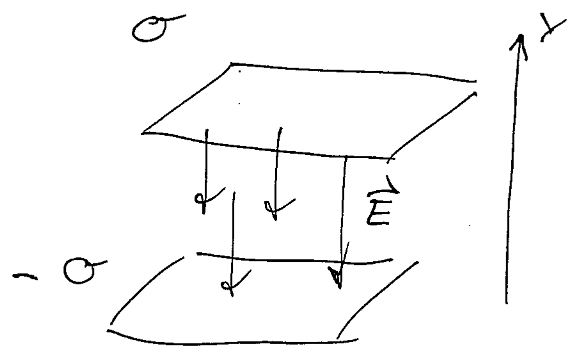
3 Elektrisk Potensiale



$\sigma > 0$ ladningstetthet

(Tilnærmet) konstant elektrisk felt $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$

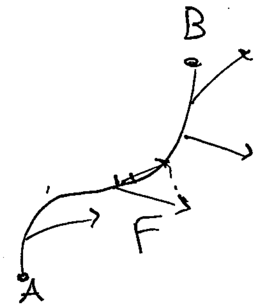
$E = |\vec{E}|$

retningen $-\vec{J}$

($\vec{J}$ enhetsvektor i y-retning.)

Kraften på en partikkel med ladning q i et elektrisk felt er $\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E}$.

Konstante vektorfelt er konservative.



Et vektorfelt $\vec{F}$ er konservativt hvis alle ~~lin~~ kurveintegraler $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{s}$ bare avhenger av startpunkt A og sluttpunkt B (og $\vec{F}$).

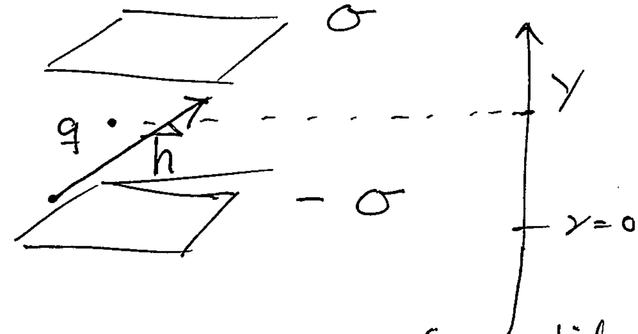
Hvis $\vec{F}$ er konservativ så eksisterer det en potensiell energifunksjon E_{pot}

$$-\vec{\nabla} E_{pot} = \vec{F}$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x} E_{pot}, \frac{\partial}{\partial y} E_{pot}, \frac{\partial}{\partial z} E_{pot} \right] = \vec{F}.$$

E_{pot} er bestemt av $\vec{F}$ opp til å addere en konstant.

I eksempelet



Så er $\quad E_{pot} = qE\cdot y \quad$ (opp til en konstant)

$$\vec{\nabla} E_{pot} = qE\vec{j}$$

$$\vec{E} = |\vec{E}|(-\vec{j}) = -E\vec{j}.$$

La $\vec{h}$ være en forflytningsvektor i vektorfeltet.

$$E\cdot y = E\cdot\vec{j}\cdot\vec{h} = -\vec{E}\cdot\vec{h}$$

$$E_{pot} = \underline{-q\vec{E}\cdot\vec{h}}$$

Kraften som Q virker på q med er Coulomb kraften :

$$\vec{F}_{el} = k\frac{Q\cdot q}{r^3}\vec{r}$$

$$|\vec{F}_{el}| = k|Q\cdot q|\frac{1}{r^2}.$$

Elektrisk felt $\quad \vec{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}_{el}}{q}.$

Coulomb kraft feltet er konservativt

(Tidligere : $\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{-\vec{r}}{r^3}$)

$$\vec{F}_{el} = \vec{\nabla}\left(-\frac{kQq}{r}\right)$$

Så $\quad E_{pot} = \underline{\frac{kQq}{r}}$

$$\vec{\nabla} \frac{E_{pot}}{q} = -\frac{\vec{F}_{el}}{q}$$

La $q \to 0$:

$$\vec{\nabla} \left(\lim_{q \to 0} \frac{E_{pot}}{q} \right) = -\vec{E}.$$

$$\lim_{q \to 0} \frac{E_{pot}}{q} = V$$ kalles elektrisk potensiale

$$\underline{\vec{\nabla} V = -\vec{E}}$$

Enheten til elektrisk potensiale er J/C.
Dette kalles også Volt.

<u>Eksempler</u> Potensialet til konstant elektrisk felt

$$V = \underline{-E \cdot h}$$

Potensialet til Coulomb feltet er

$$\underline{V = \frac{k \cdot Q}{r}}$$

<u>Eksempel</u> Hvor mye energi skal til for å fulstendig separere to punktladninger med ladninger $1\mu C$ og $-2\mu C$ hvis avstanden mellom dei er $1cm$. (Ladningene er plasert i luft).

Potensiell energi $E_{pot}(r) = k \frac{Q \cdot q}{r}$ $R = 1cm$

Energien som må tilføres $E_{pot}(\infty) - E_{pot}(R)$.

$$= -E_{pot}(R)$$

$$-E_{pot}(R) = -k\frac{Q \cdot q}{r}$$

$$= -9 \cdot 10^{9}\, N m^2 C^{-2} \cdot \frac{(10^{-6} C)(-2 \cdot 10^{-6} C)}{10^{-2} m}$$

$$= 9 \cdot 2 \cdot 10^{9-6-6+2}\, Nm$$

$$= 18 \cdot 10^{-1}\, Nm$$

$$= \underline{\underline{1.8\, J}}$$

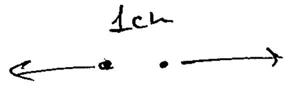
Energien er bevart.

Eksempel hvor vi bruker energibevaring.

To små ladde kuler med masse 1 gram og ladning $1 \mu C$ og $2 \mu C$ blir holdt i ro med en avstand på 1 cm mellom seg.

Begge kulene slippes.

Hva er banefarten til kulene når de er kommet langt fra hverandre



Fra forrige oppgave
(Kulene ligger i ro)

$E_{pot}(R) = 1.8 J.$

$E_{kin}(R) = 0$

$E_{pot}(\infty) = 0$

$E_{kin}(\infty) = 1.8 J$

$E_{pot} + E_{kin}$ er bevart :

Det virker ingen ytre krefter på systemet

så bevegelsesmengden er bevart. Den er $\vec{0}$.

Derfor er $m\vec{V}_1 + m\vec{V}_2 = \vec{0}$

$m = 1\,\text{gram}$. så $\vec{V}_1 = -\vec{V}_2$, $V_1 = V_2$

Kinetisk energi er $\frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}mV_2^2$

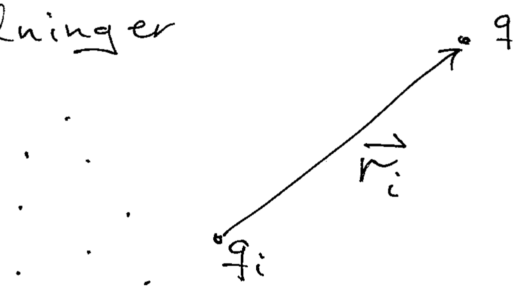
$$= \frac{1}{2}m(V_1^2 + V_1^2) = mV_1^2$$
$$= m \cdot V_2^2.$$

Vi får at

$$V_1 = V_2 = \sqrt{\frac{E_{kin}}{m}} = \sqrt{\frac{1.8\,J}{10^{-3}\,kg}}$$
$$= \sqrt{1800\,m^2/s^2} = \underline{42\,m/s}.$$

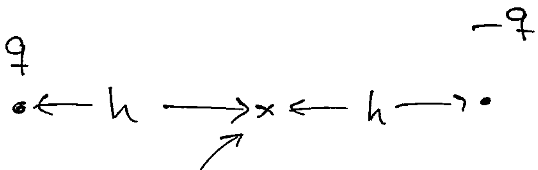
Banefarten er 42m/s for begge kulene.

Anta vi har flere ladninger



Addisjonsprinsippet

Potensialet $V = \sum k \frac{q_i}{r_i}$

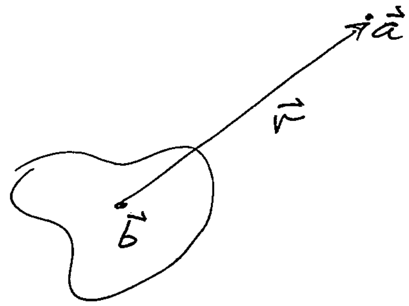


potensialet er 0

$$\left(\frac{k \cdot q}{h} + \frac{k(-q)}{h} = 0 \right)$$

Kontinuerlig ladningsfordeling.

$$V = k \int \frac{dq}{r}$$



$$\vec{r} = \vec{a} - \vec{b}$$

Begrunnelse. $$-\vec{\nabla}_{\vec{a}} V = \vec{\nabla}_{a}\left(-k \int \frac{dq}{|\vec{a}-\vec{b}|}\right)$$

$$= -k \int \vec{\nabla}_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{a}-\vec{b}|}\, dq$$

$$= -k \int \frac{-(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}-\vec{b}|^3}\, dq$$

$$= +k \int \frac{\vec{r}}{r^3}\, dq$$

$$= \vec{E}.$$

Differansen ΔV i elektrisk potensiale kalles elektrisk spenning.

Spenningen er veldefinert

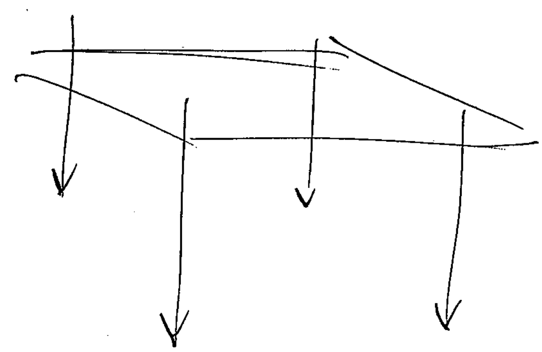
($(V_2 + c) - (V_1 + c) = V_2 - V_1$
er uavhengig av valg av konstanten c.)

Det er vanlig å bruke symbolet $\underline{U}$ for spenning.

Spenningen mellom platene i første eksempel er $\Delta V = E \cdot h = \frac{\sigma}{\epsilon} h$ hvor h er avstanden mellom platene.

Løsning til likning $V(\vec{r}) = K$, konstant er typisk en flate.
Slike flate kalles ekvipotensialflater

<u>Eks</u> Konstant elektrisk felt.
De ekvipotensielle flatene er de horisontale planene.

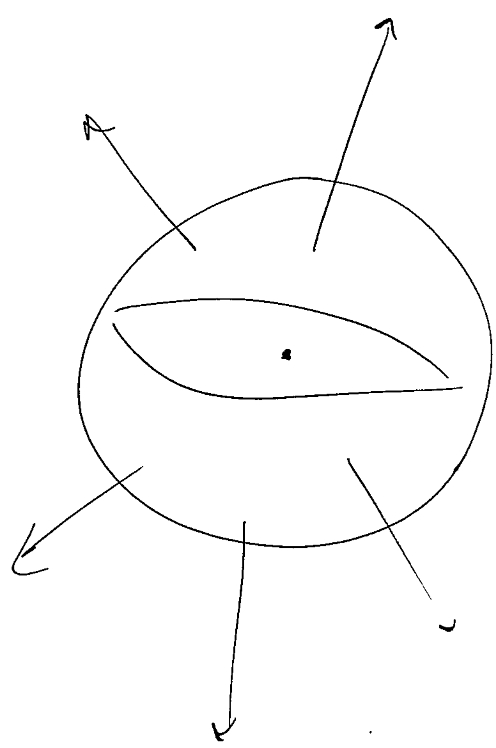


Coulomb felt

$$V = k \cdot \frac{Q}{|\vec{r}|} = K \text{ konst}$$

$$|\vec{r}| = \frac{kQ}{K}$$

De ekvipotensielle flatene er sfærer med senter i origo. (Ladningen Q er i origo)



Vi ser at det elektriske feltet står vinkelrett på de ekvipotensielle flatene.

Dette gjelder generelt.

Det er ofte enklere å tegne ekvipotensielle flater enn feltkurver.

Oppg. Finn det elektriske potensialet fra en (∞) lang ladd stav med ladningstetthet λ.

Kladd

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\, x \cdot y}{\partial x} = y$$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

sjekker for x -komponenten.

Tilsvarende for y og z komponentene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

bruker kjerneregelen med $u = x^2+y^2+z^2$

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \frac{d}{du} u^{-1/2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot u^{-3/2} \cdot 2x = -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \frac{x}{u^{3/2}}$$

$$= -\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = \frac{-x}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} = \frac{-y}{r^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = \frac{-z}{r^3}$$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = \frac{-[x, y, z]}{r^3} = \underline{\underline{-\frac{\vec{r}}{r^3}}}$$