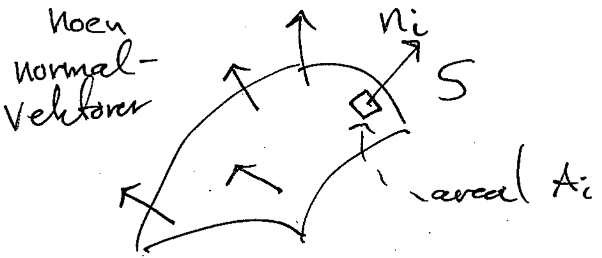
Fluks og Gauss sin lov

Gitt et vektorfelt $\vec{E}$.

Fluks av $\vec{E}$ gjennom en (orientert) flate S er $\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dA$

n enhets normal vektor til flaten

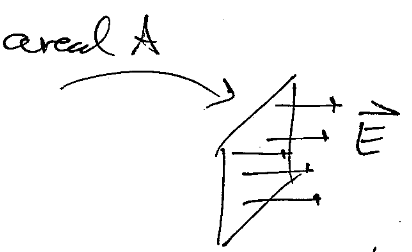
(to valgmuligheter for normalvektoren)



$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dA = \lim_{\text{alle } \Delta A_i \to 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \vec{n} \cdot \Delta A_i .$$

Huis $\vec{E}$ er væskestrøm vektorfelt (farten i hvert punkt)

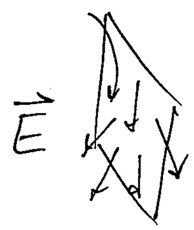
$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dA$ er da væskestrømmen gjennom flaten S (per tidsenhet)



$\vec{E}$ homogent og vinkelrett på flaten

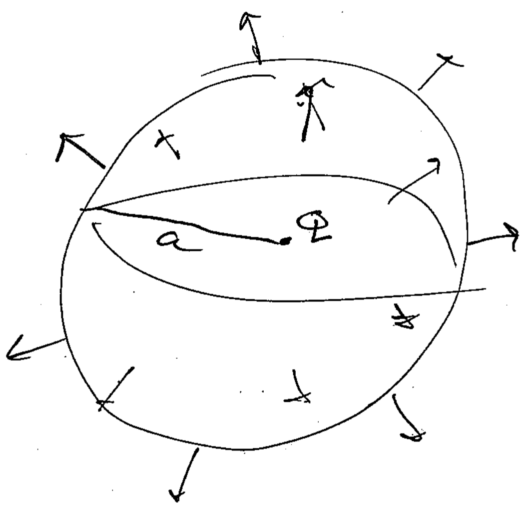
$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dA = \underline{|\vec{E}| \cdot A}$$

(orientert slikat normalvektoren også peker mot høyre)



Hvis $\vec{E}$ er parallellt med flaten (tenk på vann som strømmer langs en glass flate) da er $\vec{E}\cdot\vec{n} = 0$ i hvert punkt på flaten og $\Phi = \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, dA = 0$.

Fluks av det elektriske feltet til en punktpartikkel gjennom en sfære S med radius a og senter i punktpartikkelen.



$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad r = |\vec{r}|$$

Vektorfeltet $\vec{E}$ står vinkelrett på flaten.

Vi velger orienteringen til flaten slik at normalvektoren peker ut.

$$\vec{E}\cdot\vec{n} = |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}.$$

Fluksen $\Phi = \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, dA$

$$= \int_S \underbrace{\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}\right)}_{\text{konstant}} dA$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}\cdot\underbrace{(\text{Arealet til sfæren})}_{4\pi\cdot a^2}$$

$$= \frac{Q}{\cancel{4\pi}\varepsilon}\frac{1}{\cancel{a^2}}\cdot\cancel{4\pi a^2}$$

$$\underline{\underline{\Phi = \frac{Q}{\varepsilon}}}$$

Matematisk resultat: Gauss sitt teorem (divergensteoremet)

R 3 dimensjonal region

S overflaten til R

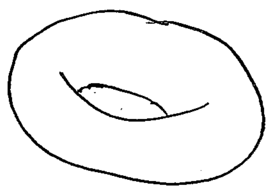
*1 R  ball (solid legeme)

overflaten til R (randen) $\partial R = S$

er en tom (hul) ball

 (sfære)

*2 R Solid torus (smultring)



∂R overflaten (gummislange)

Resultat: Fluks $\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, dA$

$$= \int_R \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV$$

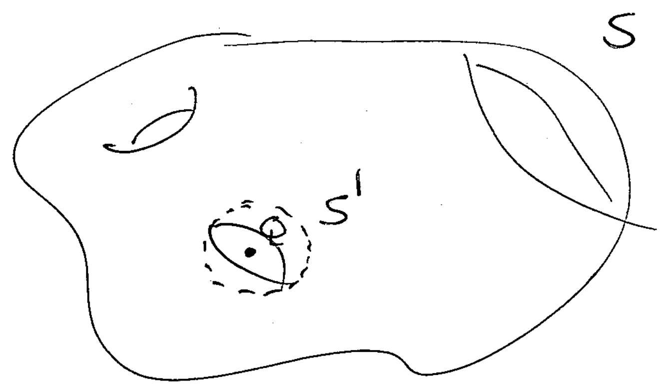
S er orientert slik at $\vec{n}$ peker ut av region R.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ må eksistere i alle punkt i R.

Hvis $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r^3}$.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ når $\vec{r} \neq 0$

(Utregning som overlates til deg.)
(se vedlegg)



$$\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dA = \underbrace{\int_{\substack{\text{regionen}\\ \text{mellom } S' \text{og } S}} \overbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}^{0 \text{ for } \vec{r}\neq 0}\cdot dV}_{0} + \underbrace{\int_{S'} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dA}_{\frac{Q}{\varepsilon}}$$

$$\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dA = \frac{Q}{\varepsilon}.$$

[$\vec{D} = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}$

$\vec{\nabla}\vec{D}$ er en Dirac delta funksjonal

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0$ når $\vec{r} \neq \vec{0}$

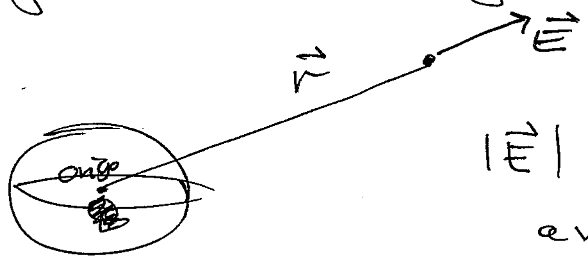
men $\int_R \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\,dV = 1$ hvis R er en region som inneholder $\vec{0}$].

Gauss sin lov

Fluksen til et elektrisk felt gjennom en lukket flate (som er randen til et legeme R) er $\frac{Q}{\varepsilon}$, hvor Q er total ladning inni flaten (i R).

Dette kan anvendes til å finne elektriske felt i situasjoner hvor ladningen er symmetrisk fordelt.

Elektrisk felt fra en sfære med radius a og en jevnt fordelt ladning Q (>0)



$|\vec{E}|$ avhenger bare av $|\vec{r}|$.

La S være sfæren med radius $|\vec{r}|$ og senter i ~~ladningen Q~~ origo

$$\text{Fluks} \quad \Phi = \int \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{n}}_{|\vec{E}|} \cdot dA = \frac{\text{Ladningen i sfæren}}{\epsilon}$$

$$= |\vec{E}| \cdot \left(\begin{matrix}\text{arealet til} \\ \text{sfæren } S\end{matrix}\right) = \frac{\text{Ladningen inni } S}{\epsilon}.$$

$$\Phi = 4\pi \cdot a^2 \, |\vec{E}|$$

(oppdatert)

Hvis $|\vec{r}| > a$, $4\pi \cdot r^2 |\vec{E}| = \frac{Q}{\varepsilon}$.

Så $|\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon \cdot r^2}$

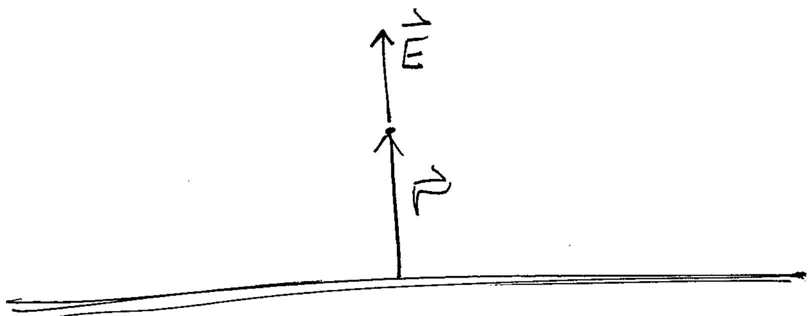
$\vec{E}$ peker i retning $\vec{r}$ (når $Q > 0$)
motsatt når $Q < 0$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

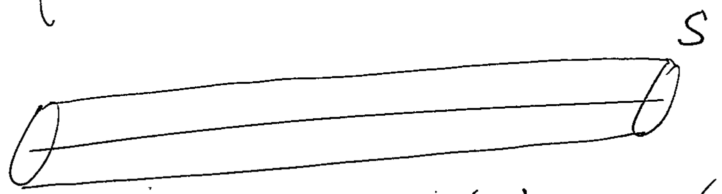
Hvis $|\vec{r}| < a$ $4\pi r^2 |\vec{E}| = \frac{0}{\varepsilon} = 0$.

Så $|\vec{E}| = 0$, og $\vec{E} = 0$.

Elektrisk felt til en veldig lang stav med konstant ladningsfordeling λ.



Velger flaten S til å være en sylinder med akse sammenfallende med staven og med radius r, og med disker på endene.



Antar staven er veldig lang med lengde L ($L \gg r$).

$$\phi \simeq \int_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dA = |\vec{E}| \cdot 2\pi \cdot r \cdot L$$

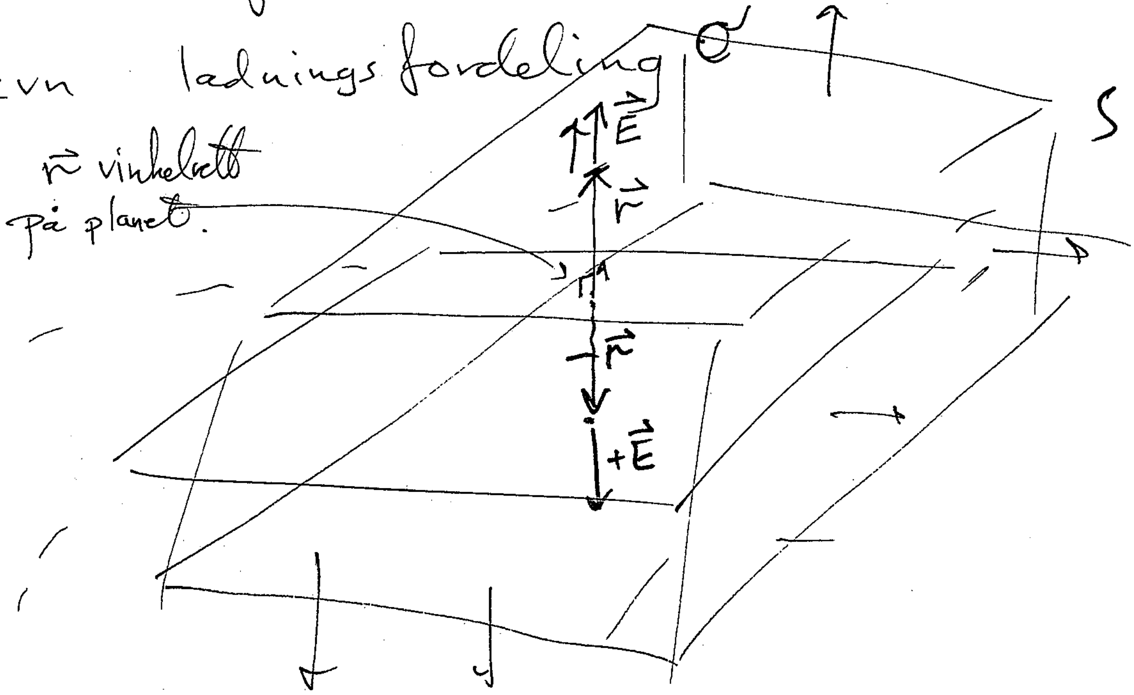
$$\phi = \frac{\text{Ladning i sylinderen}}{\varepsilon} = \frac{\lambda \cdot L}{\varepsilon}.$$

$$2\pi \cdot r \cdot \cancel{L} \cdot |\vec{E}| = \frac{\lambda \cdot \cancel{L}}{\varepsilon}$$

Så $$|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon \cdot r}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{\vec{r}}{r^2}$$

Elektrisk felt fra en stor flate med jevn ladningsfordeling σ



$$\text{Fluks} \quad \Phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dA = \frac{\text{Ladningen i } S}{\varepsilon}$$

$$|\vec{E}| \cdot (A + A) \left(\text{ser bort fra de 4 endeflatene}\right) = \frac{\sigma \cdot A}{\varepsilon}$$

$$|\vec{E}| \cdot 2\cancel{A} = \frac{\sigma \cdot \cancel{A}}{\varepsilon}$$

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

La $\vec{K} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ hvor $r = |\vec{r}|$.

Påstand $\vec{\nabla} \cdot \vec{K} = 0$ for $\vec{r} \neq \vec{0}$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{1}{(\dots)^{3/2}} - \frac{3}{2}\frac{2x \cdot x}{(\dots)^{5/2}}$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\left[x^2+y^2+z^2 - 3 \cdot x^2\right]$$

Tilsvarende for y og z av henholdsvis K_y og K_z. $\vec{K} = [K_x, K_y, K_z]$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{K} = \frac{\partial}{\partial x} K_x + \frac{\partial}{\partial y} K_y + \frac{\partial}{\partial z} K_z$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\left[3(x^2+y^2+z^2) - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2\right]$$

Dette er 0 når $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$.