Eksamen i	FO010A Matematikk 1000
	Ordinær eksamen
Dato	7. juni 2010
Tidspunkt	09.00 - 14.00
Antall oppgaver	6
Vedlegg	Formelark
Tillatte hjelpemidler	Ingen

Oppgave 1

a) Løs følgende likningssystem:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Bestem de verdiene av parameteren a som er slik at likningssystemet

$$\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 3 \\ -3 & a+1 & a+3 \\ 1 & 1 & a+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

har ikke-trivielle løsninger, og finn en basis for nullrommet til koeffisient-matrisen for hver av disse verdiene.

c) Kan følgende likningssystem være inkonsistent?

$$\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 3 \\ -3 & a+1 & a+3 \\ 1 & 1 & a+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-a \\ a-1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestem i så fall de verdiene av a som gjør systemet inkonsistent.

Oppgave 2

a) Derivér funksjonene $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$ og $g(x) = x^2 \sin(3 - x)$.

b) Finn stigningstallet til kurven gitt ved likningen $x^2y^3 = y \ln x + x^3$ i punktet $(x, y) = (1, 1)$.

Oppgave 3

a) Løs integralene $\displaystyle\int x^2 e^x \mathrm{d}x$ og $\displaystyle\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$.

b) Vis at $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{4\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \pi$.

c) La F være flaten i første kvadrant avgrenset av y-aksen, linjen $y = 1$ og grafen til funksjonen $f(x) = 1 + 2\sqrt{1-x^2}$. Finn volumet av omdreiningslegemene som dannes når F roteres $360°$ om følgende akser:

i) y-aksen

ii) linjen $y = 1$

Oppgave 4

a) Løs differensiallikningen $xy' + y = 8x^3 - 4x,\ y(1) = 0$ for $x > 0$.

b) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen $y'' - 4y' + 5y = 10$.

Oppgave 5

Salt slippes gjennom en åpning i taket av en stor silo med en konstant fart $0.30\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$, og faller slik at det dannes en kjegle med grunnflate-radius r og høyde h. Egenskapene til salt er slik at kjeglen får en grunnflate-vinkel på $30°$.

a) Hvor raskt øker høyden i kjeglen idet $h = 1.0\,\mathrm{m}$? Bruk at $1/\pi \simeq 0.318$.

b) Hvor lang tid tar det før saltkjeglen har nådd en høyde på $h = 3.0\,\mathrm{m}$?

Oppgave 6

a) Finn alle egenverdier til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Er A diagonaliserbar? Finn i så fall en invertibel matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

c) Forklar hvorfor den generelle løsningen av systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ av lineære differensiallikninger kan skrives på formen

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + C_3\mathbf{v}_3 e^{\lambda_3 t}$$

der $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ er egenverdier for A, og $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ er egenvektorer for A med $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ som egenverdier. Bruk dette til å løse systemet

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

av lineære differensiallikninger.

d) Finn den spesielle løsningen av systemet ovenfor som tilfredstiller

$$y_1(0) = 12, \quad y_2(0) = 4, \quad y_3(0) = -4$$