Høgskolen i Oslo
www.hio.no

Avdeling for ingeniørutdanning

Eksamen i Matematikk 1000

Dato: 01.06.2011

Tid: 09.00 - 14.00

Antall sider inklusive forside og vedlegg: 5

Antall oppgaver: 7

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Vedlegg: Formelark.

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig. Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen. Mellomregning og begrunnelse skal tas med i innføringen.

Faglig veileder: Lars Tuset

<table>
<tr><td rowspan="2">Utarbeidet av (faglærer):</td><td colspan="3">Kontrollert av (en av disse):</td><td rowspan="2">Studieleders/ Fagkoordinators underskrift:</td></tr>
<tr><td>Annen lærer</td><td>Sensor</td><td>Studieleder/ Fagkoordinator</td></tr>
<tr><td>Lars Tuset</td><td></td><td>Terje Solli</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Emnekode: FO 010 A

Oppgave 1 :

a) Finn grenseverdiene:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\int_1^x t^2 dt}{3\,(x-1)}$

b) Finn den deriverte y' av $y = y(x)$ når y er gitt ved:

i) $y = x\tan(x^2)$ ii) $2xy^3 + y^2 + x^2 = 0$

Oppgave 2 :

Den lineære transformasjonen S er en ortogonal projeksjon på y-aksen (dvs. en projeksjon vinkelrett inn på y-aksen). En annen lineær transformasjon er $T(x, y, z) = (3x - 2y + z, y + 2z, x - 5z)$.

a) Angi matrisene A og B til henholdsvis S og T.

b) Vis at matrisen til den sammensatte transformasjonen ST er $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Finn også matrisen til TS .

c) Angi på rent geometrisk grunnlag egenvektorene og egenverdiene til matrisen A, altså uten å bruke det karakteristiske polynomet til A . Kontroller svaret ved å bruke definisjonen av egenvektorer.

Oppgave 3 :

a) Beregn integralene:

i) $\displaystyle\int_0^\infty x\,e^{-x}\,dx$ ii) $\displaystyle\int_1^e x^{-1}\,\ln x\,dx$

b) Grafene til funksjonene $f(x) = x$ og $g(x) = x^2$ avgrenser et område i xy-planet. Finn arealet A til dette området. Finn deretter volumet V av rotasjonslegemet som oppstår når området roteres om y-aksen.

Oppgave 4 :

a) Gitt to matriser

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} .$$

Finn $3A$, $7A - B^4$, AB og B^{-1} hvis de eksisterer.

b) Avgjør for hvilke verdier av a følgende likningssystem har eksakt en løsning, uendelig mange løsninger eller ingen løsning :

$$\begin{array}{rcrcrcr} (a+2)\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & -2 \\ -x & + & (a+1)\,y & - & (a-3)\,z & = & 1 \\ x & + & y & + & (a-1)\,z & = & -1 \end{array}$$

Skriv løsningene på vektor-form når det er uendelig mange løsninger.

c) Løs systemet når $a = -1$.

Oppgave 5 :

Grunnlinjen i en rettvinklet trekant er hele tiden dobbelt så lang som høyden x. Regn ut hvor mye høyden avtar per sekund når x er 1 meter og arealet A til trekanten avtar med 0.1 kvadratmeter i sekundet. Hvor mye øker arealet dersom grunnlinjen øker med 2 meter per sekund idet høyden er 3 meter?

Oppgave 6 :

a) Finn en matrise P som diagonaliserer matrisen $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, og angi den tilhørende diagonalmatrisen D.

b) Løs differensiallikningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5x - 4y \\ \frac{dy}{dt} &= -3x + y \end{aligned}$$

Oppgave 7 :

Løs initialverdiproblemene:

a) $x^2 y' + e^{-y} = 0$, $y(1) = 1$

b) $y'' + y = \cos(2x)$, $y'(0) = y(0) = 1$