Løysingsforslag.

Oppgåve 1

a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x}\cos x \\
f'(x) &= \left(\sqrt{x}\right)'\cos x + \sqrt{x}\,(\cos x)' = \\
&\quad \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x + \sqrt{x}(-\sin x) = \underline{\underline{\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\sin x}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\sin x^2}{\ln x} \\
g'(x) &= \frac{\left(\sin x^2\right)'\ln x - \sin x^2\,(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\cos x^2 \cdot \left(x^2\right)'\ln x - \sin x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \\
&\quad \frac{\cos x^2 \cdot 2x\ln x \cdot x - \sin x^2}{(\ln x)^2 \cdot x} = \underline{\underline{\frac{2x^2\cos x^2\ln x - \sin x^2}{x(\ln x)^2}}}
\end{aligned}$$

b)

$$\left(\frac{x}{4}\right)^4 + \left(\frac{y}{2}\right)^4 = 1, \quad P = (2, \sqrt[4]{15})$$

Implisitt derivasjon:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{x}{4}\right)^4 + \left(\frac{y}{2}\right)^4\right) &= \frac{d}{dx}1 \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4^4}x^4 + \frac{1}{2^4}y^4\right) &= 0 \\
\frac{4}{4^4}x^3 + \frac{4}{2^4}y^3\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\frac{1}{16}x^3 + y^3\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{16}\left(\frac{x}{y}\right)^3
\end{aligned}$$

Stigningstalet til tangenten i punktet P:

$$-\frac{1}{16}\left(\frac{2}{\sqrt[4]{15}}\right)^3 = -\frac{1}{2\cdot 15^{3/4}}$$

Liking for tangenten:

$$y - \sqrt[4]{15} = -\frac{1}{2\cdot 15^{3/4}}(x-2)$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{2\cdot 15^{3/4}}x + \sqrt[4]{15} + \frac{1}{15^{3/4}}}}$$

c)

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\, dx = \int \left(x^{1/2} + x^{-1/3}\right)\, dx =$$
$$\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{1/2+1} + \frac{1}{-\frac{1}{3}+1}x^{-1/3+1} + C = \underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C}}$$

For integralet $\int_0^{\pi/9} \frac{\sin(3x)}{\cos^4(3x)}\, dx$ nyttar vi oss av dette variabelbytet:

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & \cos(3x) \\ \frac{du}{dx} & = & -3\sin(3x) \\ dx & = & \frac{du}{-3\sin(3x)} \\ u(0) & = & 1 \\ u(\pi/9) & = & \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\int_0^{\pi/9} \frac{\sin(3x)}{\cos^4(3x)}\, dx = \int_{u(0)}^{u(\pi/9)} \frac{\sin(3x)}{u^4}\,\frac{du}{-3\sin(3x)} = -\frac{1}{3}\int_1^{1/2} u^{-4}\, du =$$
$$-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{-3}u^{-3}\right]_1^{1/2} = \frac{1}{9}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - 1^{-3}\right] = \frac{1}{9}\cdot(8-1) = \underline{\underline{\frac{7}{9}}}$$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2}-1}{\tan(x^2-4)}$

Vi ser at både teljar og nemnar går mot 0 når x går mot 2. Vi brukar L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}-1}{\tan(x^2-4)} = \lim_{x\to 2} \frac{(e^{x-2}-1)'}{(\tan(x^2-4))'} = \lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}}{(1+\tan^2(x^2-4))\cdot 2x} =$$
$$\frac{e^{2-2}}{(1+\tan^2 0)\cdot 4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Variabelbyte: $u = 1/x$. Når x går mot ∞, vil u gå mot 0 frå oversida:

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\sin u}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = \underline{\underline{1}}$$

Oppgåve 2

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi nyttar kofaktorekspansjon langs den fyrste rekka:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \\ & 1 \cdot 1 - 0 + (-1) \cdot (-1) - 0 = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

$\underline{\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ er inverterbar}}$.

b) Vi bestemer A^{-1} ved å løyse matriselikninga $AX = I_3$ der I_3 er 3×3-identitetsmatrisa, og den ukjende 3×3-matrisa X vil vere A^{-1}. Vi løyser likninga ved rekkeoperasjonar på totalmatrisa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Legg rekke 1 til rekke 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Legg rekke 2 til rekke 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Delar rekke 3 på 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Trekk rekke 3 frå rekke 2 og 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Altså:

$$A^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

c)

$$
\begin{aligned}
A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
& \quad \frac{1}{2}(3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Løysing:

$$\underline{\underline{x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2}}$$

d) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} 1\cdot 3+0+0 & 0+0+1\cdot 1 & 1\cdot 1+0+0 & 1\cdot 5+0+1\cdot 2 \\ -1\cdot 3+1\cdot(-2)+0 & 0+1\cdot 1+0 & -1\cdot 1+1\cdot 3+0 & -1\cdot 5+0+0 \\ 0+(-1)\cdot(-2)+0 & 0+(-1)\cdot 1+1\cdot 1 & 0+(-1)\cdot 3+0 & 0+0+1\cdot 2 \end{pmatrix} = \\
& \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 7 \\ -5 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}}}
\end{aligned}
$$

Matriseproduktet BA er ikkje veldefinert sidan B har 4 søyler og A har 3 rekker.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

e) $\int \frac{3x^2+1}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$
Delbrøksoppspalting:

$$\frac{3x^2+1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1}$$
$$3x^2+1 = (ax+b)(x-1)+c(x^2+1) = ax^2-ax+bx-b+cx^2+c$$
$$3x^2+1 = (a+c)x^2+(-a+b)x+(-b+c)$$
$$\begin{cases} a+c &= 3 \\ -a+b &= 0 \\ -b+c &= 1 \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Frå *c)* ser vi at $a=1$, $b=1$ og $c=2$. Dermed får vi at

$$\begin{aligned}&\int \frac{3x^2+1}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = \\ &\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx + 2\ln|x-1| = \\ &\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \arctan x + \ln(x-1)^2\end{aligned}$$

Integralet som står att, løyser vi ved variabelbyte:

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2+1 \\ \tfrac{du}{dx} &= 2x \\ dx &= \tfrac{du}{2x} \quad \text{slik at} \\ \int \tfrac{x}{x^2+1}\,dx &= \int \tfrac{x}{u}\tfrac{du}{2x} = \tfrac{1}{2}\int u^{-1}\,du = \tfrac{1}{2}\ln|u| + C = \ln\sqrt{x^2+1} + C \end{aligned}$$

Vi får:

$$\int \frac{3x^2+1}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = \underline{\underline{\ln\left((x-1)^2\sqrt{x^2+1}\right) + \arctan x + C}}$$

Oppgåve 3

a) $f(t) = \frac{1}{2}(t+10)e^{-t/10}$ gir kor mykje vatn som renn inn per tid. Vassmengda etter eitt minutt finn vi då ved å rekne ut integralet

$$\int_0^{60} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{60} (t+10)e^{-t/10}\,dt \quad .$$

Vi reknar ut integralet ved delvis integrasjon: $\int_a^b uv'\,dt = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dt$

$u = t+10, \qquad u' = 1$

$v' = e^{-t/10}, \qquad v = -10e^{-t/10}$

$$\int_0^{60} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\left[-10(t+10)e^{-t/10}\right]_0^{60} - \int_0^{60} 1\cdot(-10)\,e^{-t/10}\,dt\right) =$$

$$-5\left[70e^{-6} - 10\right] + 5\left[-10e^{-t/10}\right]_0^{60} = 50 - 350e^{-6} - 50(e^{-6}-1) = 100 - \frac{400}{e^6}$$

Altså, etter eitt minutt er der $(100 - \frac{400}{e^6})$ dl $= \underline{\underline{10 - \frac{40}{e^6}\ \mathrm{l}}} \approx 10$ l vatn.

b) Vatnet har også form som ei kjegle. Difor vert volumet $V = \pi/3\, r^2 y$, der r er radiusen i sirkelskiva på toppen av vasskjegla. På grunn av formliksap, vil forholdet mellom denne radiusen og radiusen i heile kjegla, R, vere lik forholdet mellom vasshøgda y og totalhøgda H. Altså

$$\frac{r}{y} = \frac{R}{H} \Leftrightarrow r = \frac{R}{H}\,y$$

Dermed blir volumet av vatnet

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{H}\,y\right)^2 y = \frac{\pi}{3}\frac{R^2}{H^2}y^3 = \frac{\pi}{3}\frac{(4.0\ \mathrm{dm})^2}{(8.0\ \mathrm{dm})^2}\,y^3 = \underline{\frac{\pi}{12}\,y^3}$$

c) Vi har fått vite at $y(0) = 8.0$ dm og at $V'(0) = -1/160\ \mathrm{dm}^3/\mathrm{s}$.

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{\pi}{12}\,(y(t))^3 \\ V'(t) &= \frac{\pi}{12}\,3(y(t))^2\cdot y'(t) = \frac{\pi}{4}\,(y(t))^2\,y'(t) \\ y'(t) &= \frac{4V'(t)}{\pi(y(t))^2} \\ y'(0) &= \frac{4V'(0)}{\pi(y(0))^2} = \frac{4\cdot\left(-\frac{1}{160}\ \mathrm{dm}^3/s\right)}{\pi(8.0\ \mathrm{dm})^2} = -\frac{1}{2560\pi}\ \mathrm{dm/s} \end{aligned}$$

Vatnet minkar med med $\underline{\underline{\frac{1}{2560\pi}\ \mathrm{dm/s}}}$.

d) Vi lar no y vere gitt i dm.

$$-\frac{\sqrt{2}}{10}\sqrt{y} = y^2\,y' \quad , \quad y(0) = 8.0$$

Differensiallikninga er separabel:

$$\begin{aligned}
-\frac{\sqrt{2}}{10}y^{1/2} &= y^2\,\frac{dy}{dt}\\
y^{2-1/2}\,dy &= -\frac{\sqrt{2}}{10}\,dt\\
\int y^{3/2}\,dy &= -\frac{\sqrt{2}}{10}\int 1\,dt\\
\frac{1}{\frac{3}{2}+1}y^{3/2+1} &= -\frac{\sqrt{2}}{10}t + C'\\
y^{5/2} &= \frac{5}{2}\left(C' - \frac{\sqrt{2}}{10}t\right)\\
y(t) &= \left(C - \frac{\sqrt{2}}{4}t\right)^{2/5} \qquad (C = 5C'/2)
\end{aligned}$$

Vi brukar initialkravet til å bestemme C:

$$\begin{aligned}
y(0) &= 8.0\\
(C-0)^{2/5} &= 8.0\\
C &= 8.0^{5/2}
\end{aligned}$$

Dermed får vi løysinga

$$\underline{\underline{y(t) = \left(8.0^{5/2} - \frac{\sqrt{2}}{4}t\right)^{2/5}}}$$

e) $-\frac{\sqrt{2}\pi}{40}\sqrt{y} + 0.25 = \frac{\pi}{4}y^2y'$
Når vatnet renn like fort inn som ut, vil ikkje vasshøgda y endre seg. Vi vil difor ha at $\underline{\underline{y' = 0}}$. Vi kan finne ut kva y vil nerme seg når $y' \to 0$ ved å sette $y' = 0$ inn i differensiallikninga over:

$$\begin{aligned}
-\frac{\sqrt{2}\pi}{40}\sqrt{y} + 0.25 &= \frac{\pi}{4}y^2 \cdot 0\\
-\frac{\sqrt{2}\pi}{40}\sqrt{y} + \frac{1}{4} &= 0\\
\frac{\pi}{40}\sqrt{2y} &= \frac{1}{4}\\
\sqrt{2y} &= \frac{10}{\pi}\\
2y &= \frac{100}{\pi^2}\\
y &= \frac{50}{\pi^2}
\end{aligned}$$

y vil nerme seg $\underline{\underline{50/\pi^2}}$.

Oppgåve 4

a)

$$y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Vi går ut frå at løysinga er på forma $y = e^{rx}$.

$$\begin{aligned} y'(x) &= re^{rx} \\ y''(x) &= r^2e^{rx} \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} & r^2e^{rx} + 2re^{rx} + 2e^{rx} = 0 \\ & r^2 + 2r + 2 = 0 \\ & r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i \end{aligned}$$

Generell løysing:

$$y(x) = Ae^{(-1+i)x} + Be^{(-1-i)x} = e^{-x}\left(Ae^{ix} + Be^{-ix}\right)$$

Vi bestemmer A og B ved initialkrava:

$y'(x) = (-1+i)Ae^{(-1+i)x} + (-1-i)Be^{(-1-i)x}$

$$\begin{cases} y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ae^0 + Be^0 &= 0 \\ (-1+i)Ae^0 + (-1-i)Be^0 &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ (-1+i)A - (1+i)B &= 1 \end{cases}$$

Den øvste likninga gir at $B = -A$. Dette set vi inn i den nederste likninga:

$$\begin{aligned} (-1+i)A - (1+i)(-A) &= 1 \\ -A + iA + A + iA &= 1 \quad , \end{aligned}$$

slik at

$$A = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} \quad \text{og} \quad B = -A = \frac{i}{2}$$

Dermed:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-x}\left(-\frac{i}{2}e^{ix} + \frac{i}{2}e^{-ix}\right) = \\ & -\frac{i}{2}e^{-x}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = -\frac{i}{2}e^{-x}\left(2i \sin x\right) = \underline{\underline{e^{-x}\sin x}} \end{aligned}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
Eigenvektor $\mathbf{v}$ og eigenverdi λ oppfyller

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (A - \lambda I_2)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

For at denne likninga skal ha ikkje-trivielle løysingar, må determinanten til koeffisientmatrisa i likninga til høgre vere 0:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= 0 \\ \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (2-\lambda)(-2-\lambda) - (-3)\cdot 1 &= 0 \\ \lambda^2 - 1 &= 0 \\ \lambda &= \pm 1 \end{aligned}$$

Eigenvektor for $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2-(-1) & -3 \\ 1 & -2-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_1 - v_2 &= 0 \\ v_1 &= v_2 \\ \mathbf{v}_1 &= v_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eigenvektor for $\lambda_2 = +1$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2-1 & -3 \\ 1 & -2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_1 - 3v_2 &= 0 \\ v_1 &= 3v_2 \\ \mathbf{v}_2 &= v_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eigenverdiar med tilhøyrande eigenvektorar:

$$\underline{\underline{\lambda_1 = -1}} \text{ med } \underline{\underline{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{\lambda_2 = 1}} \text{ med } \underline{\underline{\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Den generelle løysinga er gitt ved

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ae^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + Be^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 \quad ,$$

der λ_i og $\mathbf{v}_i$, $i \in \{1,2\}$, er eigenverdiane og eigenvektorane til A. Desse fann vi i den forige deloppgåva, slik at

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ae^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Be^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

A og B blir bestemt ved initialkravet:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A+3B \\ A+B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Den øvste komponenten i vektorlikninga gir at $A = -3B$. Vi set dette inn i den nederste og får at $-3B + B = 1$, slik at $B = -1/2$ og $A = 3/2$. Dermed vert løysinga

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2}e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}e^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

d) Vi skriv opp att initialverdiproblemet over som to separate likningar:

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 3y \\ y' &= x - 2y \end{aligned}$$

Om vi deriverar begge sider i den fyrste likninga, får vi at $x'' = 2x' - 3y'$. Vi set likninga for y' inn i denne og får at $x'' = 2x' - 3(x - 2y)$. Om vi løyser den fyrste likninga for y, får vi at $y = (2x - x')/3$. Dette set vi inn og får at

$$x'' = 2x' - 3\left(x - \frac{2}{3}(2x - x')\right) = 2x' - 3x + 4x - 2x' = x \Leftrightarrow x'' - x = 0$$

Sidan differensiallikninga er av 2. orden, treng vi to initialkrav for x. Vi har alt at $x(0) = 0$. Sidan $y(0) = 1$, gir den opprinnelege differensiallikninga at $x'(0) = 2x(0) - 3y(0) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3$. Initialverdiproblemet vert

$$\underline{\underline{x''(t) - x(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -3}} \quad .$$

<u>Kontroll</u>: Vi sjekkar at svaret i deloppgåve *c)* faktisk er ei løysing av dette initialverdiproblemet.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3}{2}e^{-t} \cdot 1 - \frac{1}{2}e^{t} \cdot 3 = -\frac{3}{2}(e^{t} - e^{-t}) \\ x'(t) &= -\frac{3}{2}(e^{t} + e^{-t}) \\ x''(t) &= -\frac{3}{2}(e^{t} - e^{-t}) = x(t) \\ x''(t) - x(t) &= 0 \end{aligned}$$

Differensiallikninga er oppfyld. Vi skal også ha at $x(0) = 0$ og $x'(0) = -3$:

$$\begin{aligned} x(0) &= -\frac{3}{2}(e^0 - e^{-0}) = 0 \\ x'(0) &= -\frac{3}{2}(e^0 + e^{-0}) = -3 \end{aligned}$$

Vi ser at initialkrava også er oppfylde.