Oppgåve 1

a) *i)*

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x + \sin(2x) \\ f'(x) &= \frac{1}{x} + \cos(2x)\cdot(2x)' = \underline{\underline{\frac{1}{x} + 2\cos(2x)}} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{3x}\sqrt{1+x^2} \\ g'(x) &= \left(e^{3x}\right)'\cdot\sqrt{1+x^2} + e^{3x}\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = 3e^{3x}\sqrt{1+x^2} + e^{3x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x = \\ &\frac{3e^{3x}(1+x^2)+xe^{3x}}{\sqrt{1+x^2}} = \underline{\underline{\frac{e^{3x}(3x^2+x+3)}{\sqrt{1+x^2}}}} \end{aligned}$$

b) *i)*

$$\int \left(x^{1.2} + \sin(3x)\right)\,dx = \frac{1}{1.2+1}x^{1.2+1} + \frac{1}{3}(-\cos(3x)) + C = \underline{\underline{\frac{1}{2.2}x^{2.2} - \frac{1}{3}\cos(3x) + C}}$$

ii)

$\underline{\int_1^2 x^2 \ln x\, dx}$:

Delvis integrasjon: $\int_a^b uv'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$

$u = \ln x \Rightarrow u' = 1/x$

$v' = x^2 \Leftarrow v = x^3/3$

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2\ln x\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}\cdot 2^3\ln 2 - 0 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \\ &\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}(2^3-1) = \underline{\underline{\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}}} \end{aligned}$$

c) *i)*

$\underline{\lim_{x\to -1}\frac{2x}{1-x^2}}$:

$1-x^2 \to 0$ når $x \to -1$ og $2x \to -2$ når $x \to -1$.

Difor vil $\frac{2x}{1-x} \to \pm\infty$ når $x \to -1$; $\underline{\underline{\text{grenseverdien eksisterar ikkje}}}$.

ii)

Vi innfører variabelbytet $t = 1/x$. Vi ser at $t \to 0^+$ når $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{2}{x}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{t}\right)^2(1-\cos(2t)) = \lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos(2t)}{t^2} =$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{2\sin(2t)}{2t} = 2\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = \underline{\underline{2}}$$

Vi har her brukt L'Hôpitals regel og innført variabelbytet $u = 2t$.

Oppgåve 2

$A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

a) Vi finn eigenverdiane og eigenvektorane til A.
Karakteristisk likning: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 8-\lambda & -5 \\ 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(-4-\lambda) - 4\cdot(-5) = \lambda^2 - 4\lambda - 12 \\ \lambda &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1} = 2 \pm 4 \end{aligned}$$

$\lambda = -2 \quad \vee \quad \lambda = 6$

Eigenverdiane er $\lambda_1 = -2$ og $\lambda_2 = 6$.
Eigenvektor for $\lambda_1 = -2$:
$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$2x_1 - x_2 = 0, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Eigenvektor: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Eigenvektor for $\lambda_2 = 6$:
$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$2x_1 - 5x_2 = 0, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Eigenvektor: $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

<u>Diagonalisering</u>: $A = PDP^{-1}$ med

$$P = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}} \text{ og } D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}} .$$

Kontroll: $A = PDP^{-1} \Rightarrow AP = PD$.
$AP = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 30 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$.
$PD = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 30 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} = AP$.

b) Differensiallikninga kan skrivast som

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Den generelle løysinga av likninga er gitt ved eigen-verdiane og eigenvektorane slik:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 = C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{6t}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} + 5C_2 e^{6t} \\ 2(C_1 e^{-2t} + C_2 e^{6t}) \end{pmatrix} \\
x_1(t) &= \underline{\underline{C_1 e^{-2t} + 5C_2 e^{6t}}} \\
x_2(t) &= \underline{\underline{2(C_1 e^{-2t} + C_2 e^{6t})}} \quad .
\end{aligned}
$$

Oppgåve 3

$$f(t) = 1 - t + \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right), \quad D_f = [0, 4] \quad .$$

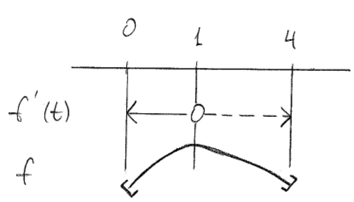
a) Folketalet aukar raskast når f er maksimal. Vi deriverar:

$$f'(t) = -1 + \frac{6}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\cdot\frac{\pi}{3} = -1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

Vi finn nullpunkta til f':

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) = 1/2 \Leftrightarrow \pi/3\,t = \pi/3 + n\cdot 2\pi \;\vee\; \pi/3\,t = -\pi/3 + 2n\pi,$$

der $n \in \mathbb{Z}$. Det gir $t = 1 + 6n \vee t = -1 + 6n$. Sidan $t \in [0, 4]$, har f' berre eitt nullpunkt: $t = 1$.
Av einingssirkelen kan vi sjå at $f'(t) > 0$ når $0 < t < 1$ og at $f'(t) < 0$ når $1 < t < 4$. Dermed har f eit toppunkt for $t = 1$ og minimalpunkt for $t = 0$ og $t = 4$. (Sjå forteiknskjema for f'.)



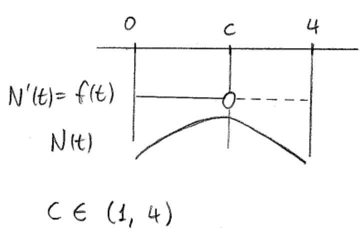
$\underline{\underline{\text{Folketalet veks altså raskast etter eitt år}}}$.
$f(0) = 1, f(4) = 1 - 4 + 6/\pi \,\sin(4\pi/3) = -3(1 + \sqrt{3}/\pi) < 0$. Det at f' er negativ, betyr at folketalet vil avta. $\underline{\underline{\text{Folketalet avtar raskast etter 4 år}}}$.

b) Sidan f er farten folketalet endrar seg med, vil den totale endringa vere integralet av denne.

$$\int_0^4 f(t)\,dt = \int_0^4 \left(1 - t + \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right)\,dt = \left[t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{6}{\pi}\cdot\frac{3}{\pi}(-\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right))\right]_0^4$$
$$\left(t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{18}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right)_0^4 = 4 - \frac{4^2}{2} - \frac{18}{\pi^2}\cos\frac{4\pi}{3} - 0 + \frac{18}{\pi^2} = -4 + \frac{27}{\pi^2} =$$
$$-\left(4 - \frac{27}{\pi^2}\right) \quad .$$

Sidan $27/\pi^2 < 27/3^2 = 3 < 4$, vil integralet bli negativt. Altså vil folketalet totalt ha avtatt etter desse fire åra om modellen stemmer. Totalt vil det ha avtatt med $\underline{\underline{\text{ca. } 1000 \cdot (4 - 27/\pi^2) \text{ personar}}}$.

c) Dersom vi let totalt folketal vere $N(t)$, vil vi ha at $f(t) = N'(t)$. N er maksimal når $N'(t)$ endrar forteikn frå positiv til negativ – eller i eit randpunkt. Sidan $f(t)$ er kontinuerleg og gitt monotonieigenskapene og randverdiane til f, som vi fann i *a)*, vil f endre forteikn berre ein gong på definisjonsmengda. Vidare ser vi at f fyrst er positiv og så negativ. Dermed vil $N(t)$ vere maksimal når $\underline{\underline{f(t) = 0}}$. (Sjå forteiknskjema for $N'(t) = f(t)$.)



Oppgåve 4

a) $2A = 2\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 & 8 & -2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}}}$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}}}$$

$\underline{\underline{B^2 - 3A \text{ er ikkje definert}}}$ sidan B og B^2 har 3 søyler og A har 2 rekkjer.

b) For å finne B^{-1}, rekkereduserar vi totalmatrisa $(B|I_3)$ slik at vi får I_3 til venstre:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} -2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)\begin{array}{cc} & \\ & \\ 4 & 2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)$$

$$\underline{\underline{B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}}$$

c) Likningsystemet har eintydig løysing når determinanten til koeffesientmatrisa er ulik 0.

$$\begin{vmatrix} a-1 & -1 & a+3 \\ 2 & a+1 & -(a+1) \\ 1 & 1 & a-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 2a \\ 2 & a+1 & -(a+1) \\ 1 & 1 & a-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a+1 & -(a+5) \\ 1 & 1 & a-5 \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} a+1 & -(a+5) \\ 1 & a-5 \end{vmatrix} = a\,[(a+1)(a-5)+(a+5)] = a(a^2-3a) = a^2(a-3)$$

Systemet har eksakt ei løsning når $\underline{\underline{a \notin \{0,3\}}}$.

d) Totalmatrise med $\underline{a=0}$:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} -1 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} -2 \quad -1 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\text{Systemet har uendeleg mange løysinger når } a = 0}}$.

$$\begin{array}{ccccccc} x & & + & 2z & = & 0 \\ & y & - & 5z & = & 2 \end{array}$$

$x = -2z$

$y = 2 + 5z$

$x = -2t$
$y = 2 + 5t$
$z = t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Totalmatrise med $\underline{a = 3}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{cc} -2 & -2 \\ & \\ & \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \frac{1}{2} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 6 & -6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 3 \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Av den nederste rada ser vi at likningssystemet er inkonsistent. $\underline{\underline{\text{Systemet har inga løysing når } a = 3}}$.

e) Vi ser at når $a = 1$, vert koeffesientmatrisa til likningssystemet lik matrisa B i deloppgåve *a)*. Vi har difor at

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{x = 2 \ , \ y = -2 \ , \ z = -1 \ .}}$

Oppgåve 5

a)

$$y'' + 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Vi går ut frå at løysinga kan skrivast på forma $y = e^{rt}$. Det gir at $y' = re^{rt}$ og $y'' = r^2 e^{rt}$, slik at vi får

$$\begin{aligned} r^2 e^{rt} + 6re^{rt} + 13e^{rt} &= 0 \\ r^2 + 6r + 13 &= 0 \\ r &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = -3 \pm 2i \end{aligned}$$

Generell løysing: $y = e^{-3x}\left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right)$.
Initialkrav: $y(0) = 0 \Leftrightarrow e^0(A \cdot 1 + B \cdot 0) = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

$y' = -3e^{-3x} \cdot B\sin(2x) + e^{-3x} \cdot B + \cdot 2\cos(2x) =$
$Be^{-3x}(2\cos(2x) - 3\sin(2x))$.
Initialkrav: $y'(0) = 1 \Leftrightarrow Be^0(2 \cdot 1 - 0) = 1 \Leftrightarrow B = 1/2$.
Løysing:

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{2}e^{-3x}\sin(2x)}} \quad .$$

b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y + x^2y}, \quad y(0) = -2$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2x}{y+x^2y} = \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{y} \\ y\,dy &= \frac{2x}{1+x^2}\,dx \\ \int y\,dy &= \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \end{aligned}$$

Integralet på høgre side kan løysast ved variabelbyte:
$u = 1 + x^2,\ du = 2x\,dx$.
$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int 1/u\,du = \ln|u| + C = \ln(1+x^2) + C$.
Dermed får vi at $\frac{1}{2}y^2 = \ln(1+x^2) + C$.
Initialkravet gir at $1/2 \cdot (-2)^2 = \ln(1+0) + C$ slik at $C = 2$. Dermed får vi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y^2 &= \ln(1+x^2) + 2 \\ y &= \pm\sqrt{2\ln(1+x^2) + 4} \end{aligned}$$

Vi må velge minus-løysinga på grunn av initialkravet:

$$\underline{\underline{y = -\sqrt{2\ln(1+x^2)+4}}} \quad .$$

c)

$$y' + 3y = \sin x, \quad y(0) = 0$$

Integrerande faktor: $e^{F(x)}$ der $F'(x) = 3$. Vi vel $F = 3x$.

$$\begin{aligned} e^{3x}(y' + 3y) &= e^{3x}\sin x \\ (e^{3x}y)' &= e^{3x}\sin x \\ e^{3x}y &= \int e^{3x}\sin x\,dx \end{aligned}$$

Integralet på høgre side kan løysast ved å bruke delvis integrasjon to gonger:

$$\int e^{3x}\sin x\,dx = e^{3x}(-\cos x) - \int 3e^{3x}\cos x\,dx = -e^{3x}\cos x + 3\int e^{3x}\cos x\,dx =$$
$$-e^{3x}\cos x + 3\left(e^{3x}\sin x - \int 3e^{3x}\sin x\,dx\right) = e^{3x}(3\sin x - \cos x) - 9\int e^{3x}\sin x\,dx \Leftrightarrow$$
$$(1+9)\int e^{3x}\sin x\,dx = e^{3x}(3\sin x - \cos x) + C_1 \Leftrightarrow$$
$$\int e^{3x}\sin x\,dx = \frac{1}{10}e^{3x}(3\sin x - \cos x) + C_2$$

Dermed får vi at

$$y(x) = e^{-3x}\left(\frac{1}{10}e^{3x}(3\sin x - \cos x) + C_2\right) = \frac{3}{10}\sin x - \frac{1}{10}\cos x + C_2 e^{-3x}.$$

Initialkrav: $y(0) = 0$
Det gir at $0 = 3/10\,\sin 0 - 1/10\,\cos 0 + C_2 \cdot e^0$, slik at $C_2 = 1/10$. Dermed får vi at

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{3}{10}\sin x - \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{10}e^{-3x}}}\quad .$$

Oppgåve 6

a) $S\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $S\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ og $S\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

gir at $A = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}}$.

$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\-5\end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}$ og $T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\-7\\0\end{pmatrix}$

gir at $B = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&4&-7\\-5&3&0\end{pmatrix}}}$.

b) Standardmatrisa til transformasjonen ST er

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}}} \qquad \text{(q. e. d.).}$$

Standardmatrisa til transformasjonen TS er

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -7 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}}} \,.$$