Oppgåve 1

a) Løys desse likningane:
i)
$$7^x = 3 \cdot 2^x$$
ii)
$$2\sin x + 1 = 0, \quad x \in [0, 2\pi) \quad .$$

b) Deriver desse funksjonane:
i)
$$f(x) = x^2 \cos(x^2)$$
ii)
$$g(x) = \ln(x^2) + (\ln x)^2 \quad .$$

c) Finn desse ubestemte integrala:
i)
$$\int \frac{1}{x^2+4}\, dx$$
ii)
$$\int \frac{1}{x^2-4}\, dx \quad .$$

d) Finn desse bestemte integrala:
i)
$$\int_0^1 x e^{2x^2}\, dx$$
ii)
$$\int_0^1 t \sin(\pi t)\, dt \quad .$$

Oppgåve 2

a) Gitt matrisene
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ,$$
rekn ut $A+B$, $C-2B$ og produkta AB og BC. Dersom nokon av desse uttrykka ikkje er definerte, skal du kort forklare kvifor.

b) Rekn ut determinanten til A og bruk svaret til å avgjere om A er ei invertibel matrise.
Om A er invertibel, finn A^{-1}.

c) Finn matrisa X ved å løyse likninga

$$AX + 2B = C \quad .$$

(A, B og C er gitt i deloppgåve *a*).

d) Dette likningssystemet er gitt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & s+1 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & s+4 & 3s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Løys likningssystemet for $s = 2$.

e) Avgjer for kva verdiar av s likningssystemet har eintydig løysing.

f) Finn ei matrise P som diagonaliserar matrisa A i deloppgåve *a*. Finn også den tilhøyrande diagonalmatrisa D.

Oppgåve 3

Farten til ein bil i akselerasjon kan skildrast ved funksjonen

$$v(t) = 60\left(1 - e^{-0.070\,t}\right) \qquad \text{med definisjonsmengda} \qquad D_v = [0, 40] \quad ,$$

der v er gitt i meter per sekund (m/s) og tida t er gitt i sekund (s).

a) Kor lang tid brukar bilen på å nå 30 m/s? Her kan du bruke at $\ln 2 \approx 0.69$.

b) Kor langt har bilen køyrt i løpet av desse 40 sekunda?

c) Akselerasjonen $a(t)$ finn ein ved å derivere farten $v(t)$. Når er akselerasjonen størst og når er han minst?

d) Langs norske vegar står det ein del fotoboksar som måler farten til bilane som passerar. Nokre av desse vert bruka til å måle gjennomsnittsfarten over ei vegstrekke. Der står då ein fotoboks i kvar enden av strekka. Når ein veit kor lang strekka er, kan ein finne gjennomnsittsfarten ved å dele denne lengda på tida bilen brukar på å køyre strekka. Dersom gjennomsnittsfarten er høgare enn fartsgrensa, kan ein vere sikker på at også farten har vore høgare enn fartsgrensa minst ein gong. Forklar kort, ut frå matematiske prinsipp, kvifor ein kan vere sikker på dette.

Oppgåve 4

a) Vis at vektorane $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ er lineært uavhengige, og skriv vektoren $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ som ein lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

b) Lat $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vere ein lineær transformasjon slik at

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad .$$

Finn $T(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix})$.

Oppgåve 5

Løys desse differensiallikningane.

a)

$$y'' + y' - 2y = e^x$$

b)

$$\frac{dy}{dx} - y \sin x = 0$$

c)

$$xy' + y = \frac{x}{x^2 + 1} \quad .$$