Svarene skal begrunnes. Alle deloppgavene teller like mye.

Oppgave 1

a) Deriver disse funksjonene:

$$\text{i)} \quad f(x) = (x^2+1)^3 + \sin(x) \quad ,$$

$$\text{ii)} \quad g(x) = \frac{\ln x}{x^2} \quad .$$

b) Finn de ubestemte integralene:

$$\text{i)} \quad \int (2x^2 + \sqrt{2})\, \mathrm{d}x \quad ,$$

$$\text{ii)} \quad \int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, \mathrm{d}x \quad .$$

c) Finn det bestemte integralet

$$\int_0^{\pi/3} x \sin(3x)\, \mathrm{d}x \quad .$$

d) Løs ligningen

$$\frac{e^{x^2}}{e^{3x+4}} = 1 \quad .$$

e) Løs ligningen

$$\sin(2x) - \frac{1}{2} = 0 \quad , \quad x \in [0, \pi\rangle \quad .$$

Oppgave 2

Vi har matrisene

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \; , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \; , \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad .$$

a) Regn ut $A - C$, AB, BA og AC. Dersom noen av disse uttrykkene ikke er definerte skal du kort forklare hvorfor.

b) Løs ligningene $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ og $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad .$$

Oppgave 3

En matrise A er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

a) Finn determinanten til A. Bruk svaret til å forklare hvorfor A er inverterbar.

b) Vis at A^{-1} er gitt ved

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad .$$

c) Løs ligningssettet ved å bruke A^{-1} fra oppgave b):

$$\begin{aligned} 0,5x + y &= 1 \\ x - y + z &= -6 \\ x + z &= -4 \end{aligned}$$

d) En vektor **b** er gitt ved

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a^3 \\ 3 \\ 2a \end{bmatrix} \quad .$$

For hvilke verdier av a har ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ løsninger?

Oppgave 4

a) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{e^y} = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad .$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$3y' = y'' - 10 \quad , \quad y(0) = 7, \; y'(0) = 0 \quad .$$

c) Løs differensialligningen

$$-2y' + 2y + 4x = 0 \quad .$$

Oppgave 5

a) En lineær transformasjon T er slik at

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Finn $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ og $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

b) Vi har en matrise

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan skrive B som $B = PDP^{-1}$ der

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vis hvordan vi kommer frem til matrisene P og D.

c) Finn B^5.

Oppgave 6

Artisten Skrull-X skal holde konsert i Oslo. Til konserten kan det selges maksimalt 10 000 billetter. Arrangøren antar at alle billettene vil bli solgt dersom de setter billettprisen til 400 kroner. De regner med at for hver krone de øker billettprisen over 400 kroner vil de selge 10 færre billetter.

a) Hvis billettprisen er gitt ved $400 + x$, vis at de totale inntektene fra billettsalget er gitt ved

$$I(x) = 10(-x^2 + 600x + 4 \cdot 10^5)$$

b) Arrangøren ønsker at billettinntektene skal være størst mulig. Hva bør de sette billettprisen til? Hvor store billettinntekter vil de få da?