Oppgåve 1

a) Finn den deriverte av desse funksjonane:

i) $f(x) = x^2 e^{2x}$

ii) $g(x) = \ln(\sin x) + x^2$.

b) Finn desse ubestemte integrala:

i) $\int \left(x + \frac{1}{2x-1} \right) dx$

ii) $\int \cos x \sin^3 x \, dx$.

c) Finn desse bestemte integrala:

i) $\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+1} \, dx$

ii) $\int_0^1 x e^{2x} \, dx$.

d) Løys likningane nedanfor. Svaret i ii) skal skrivast på kartesisk form eller polarform.

i) $e^{x^2-4x} = 1$

ii) $(1-i)z = 1 + \sqrt{3}i, \quad z \in \mathbb{C}$.

Oppgåve 2

Dette ukommenterte skriptet er ei implementering av Newtons metode:

```
1 x = -3;
2 xForrige = 0;
3 pres= 0.1;
4 while abs(x-xForrige)>pres
5   xForrige = x;
6   x=x-(exp(x) + sin(x) + 1.6*x - 7)/(exp(x) + cos(x) + 1.6);
7 end
8 loeysing=x
```

Skriptet kan køyrast i t.d. Octave. `abs(x)` reknar ut absoluttverdien til `x` og `exp(x)` gir e^x. Du kan godt referere til linjenummera til venstre i svara dine.

Skriv ned likninga vi forsøker å løyse med den gitte koden.

Korleis kan vi med ei lita justering av skriptet finne eit meir nøyaktig svar?

Oppgåve 3

a) Vi tenkjer oss at banen til ein stein som blir kasta, er gitt ved denne funksjonen:

$$g(x) = 2 + x + 0.1e^{0.1x}x(10 - x) \quad .$$

Her er x avstanden langs bakken frå staden steinen vart kasta, og g er høgda steinen har over bakken. Eininga for både x og g er meter.

Kor høgt steinen er på det høgaste er bestemt av denne likninga:

$$1 + 0.1e^{0.1x}(10 - x - 0.1x^2) = 0 \quad .$$

Forklar korleis vi kan komme fram til dette.

b) Ei kanonkule blir skutt rett opp i lufta. I det ho blir skutt ut, ved $t = 0$, har ho farten $v_0 = 15$ m/s oppover. Farten oppover som funksjon av tida vil følgje denne differensiallikninga:

$$v'(t) = -g - k\,v(t)$$

der tyngdeakselerasjonen g kan tilnærmast med 10 m/s^2 og $k = 0.1$ s^{-1}. $v(t)$ er her gitt i m/s og t er gitt i sekund.

Vis korleis ein kan komme fram til at

$$v(t) = 115\,e^{-0.1t} - 100 \quad .$$

c) Kula var 2 m over bakken i det ho vart skutt ut. Bruk denne opplysinga, saman med uttrykket for $v(t)$, til å komme fram til ei likning som bestemmer når kula treff bakken. Du skal *ikkje* løyse denne likninga.

Oppgåve 4

a) Gitt desse matrisene:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad ,$$

rekn ut $A + B$, AB, BA og $2B - 3C$. Dersom nokon av uttrykka ikkje er definerte, skal du forklare kvifor.

b) Rekn ut determinanten til A. Bruk svaret til å avgjere om A er invertibel.

c) Gitt likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + a\,x_2 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 &= b \quad , \end{aligned}$$

bestem paramerane a og b slik at systemet har

i) eintydig løsysing
ii) uendeleg mange løsyingar
iii) inga løysing .

Oppgåve 5

Tabellen nedanfor viser nokre funksjonsverdiar med tilhøyrande argumentverdiar for funksjonen $f(x)$:

x	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	2.000	2.301	2.243	1.938	1.546

a) Bruk tabellen til å estimere $f'(0.5)$.

b) Bruk tabellen til å estimere $\int_0^2 f(x)\,dx$.

c) Funksjonen det er tale om, er ein elementær funksjon:

$$f(x) = 2\cos(0.9x) + x \quad .$$

Bruk dette til å rekne ut $f'(0.5)$ og $\int_0^2 f(x)\,dx$ nøyaktig.
Kor stor er feilen i estimata frå a) og b)?

Oppgåve 6

a) Finn den generelle løysinga av differensiallikninga

$$y' + \frac{\sin x}{y} = 0 \quad .$$

b) Løys initialverdiproblemet

$$y' = x\sin x^2, \quad y(0) = 1 \quad .$$

c) Skriptet nedanfor, som kan køyrast i t.d. Octave, estimerar løysinga av eit initialverdiproblem. Kva for eit?

```
x0=0;                  % Startverdi for x
xSlutt=10;             % Sluttverdi for x
y0=1;                  % Initialkrav:

N=50;                  % Talet på steg
h=(xSlutt-x0)/N;       % Steglengda

xVektor=x0:h:xSlutt;   % Lagar vektor med x-verdiar
yVektor(1)=y0;         % Startar på vektor med y-verdiar

% For-løkke for Eulers metode
for n=1:N
  xn=xVektor(n);
  yn=yVektor(n);
  yD=sqrt(yn)+cos(xn);
  yVektor(n+1)=yn+yD*h;
end

plot(xVektor,yVektor) %Plottar resultatet
```

Oppgåve 7

Den lineære transformasjonen T frå $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$, oppfyller

$$T(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Bruk dette til å bestemme standardmatrisa til T.