Oppgåve 1

a) i)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 e^{2x} \\ f'(x) &= \left(x^2\right)' \cdot e^{2x} + x^2\left(e^{2x}\right)' = 2xe^{2x} + x^2 e^{2x} \cdot (2x)' = \\ & 2xe^{2x} + 2x^2 e^{2x} = \underline{\underline{2xe^{2x}(1+x)}} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(\sin x) + x^2 \\ g'(x) &= \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' + 2x = \underline{\underline{\frac{\cos x}{\sin x} + 2x}} = \frac{1}{\tan x} + 2x \end{aligned}$$

b) i)

$$\int \left(x + \frac{1}{2x-1}\right) dx = \int x\,dx + \int \frac{1}{2x-1}\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C}}$$

For å anti-derivere det siste leddet har vi bruka reglane
$\int 1/x\,dx = \ln|x| + C$ og
$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(ax+b)\,dx = 1/a \cdot F(ax+b) + C$.

ii)

$$\int \cos x \sin^3 x\,dx$$

Variabelbyte:

$$x = \sin x, \quad \frac{du}{dx} = \cos x, \quad dx = \frac{1}{\cos x}\,du$$

$$\int \cos x \sin^3 x\,dx = \int \cos x\, u^3 \frac{1}{\cos x}\,du = \int u^3\,du = \frac{1}{4}u^4 + C = \underline{\underline{\frac{1}{4}\sin^4 x + C}}$$

c) i)

$$\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Det fyrste leddet på høgre side blir null sidan integranden er ein odde funksjon og integrasjonsintervallet er symmetrisk om 0. Ein kan også sjå at det blir 0 ved variabelbyte:

$$\begin{aligned} & u = x^2 + 1, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{1}{2x}\,du \\ & u(-1) = (-1)^2 + 1 = 2 \quad \text{og} \quad u(1) = 1^2 + 1 = 2 \quad . \end{aligned}$$

Det gir:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_{u(-1)}^{u(1)} \frac{x}{u}\,\frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int_{2}^{2} \frac{1}{u}\,du = 0 \quad .$$

Sidan $\int 1/(x^2+1)\,dx = \arctan x + C$, får vi at

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+1}\,dx &= 0 + [\arctan x]_{-1}^{1} = \arctan 1 - \arctan(-1) = \\ &\quad 2\arctan 1 = 2\frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}} \quad .\end{aligned}$$

ii)

$$\int_0^1 xe^{2x}\,dx$$

Delvis integrasjon: $\int_a^b uv'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$.
$u = x \Rightarrow x' = 1$
$v' = e^{2x} \Leftarrow v = e^{2x}/2$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{2x}\,dx &= \left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx = \\ &\quad \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{e^2+1}{4}}} \quad .\end{aligned}$$

d) i)

$$\begin{aligned}e^{x^2-4x} &= 1 = e^0 \\ x^2 - 4x &= 0 \\ x(x-4) &= 0 \\ x &= 0 \quad \text{eller} \quad x-4=0\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{x = 0 \quad \text{eller} \quad x = 4}}$$

ii)

$$\begin{aligned}(1-i)z &= 1+\sqrt{3}i \\ z &= \frac{1+\sqrt{3}i}{1-i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+\sqrt{3}i+\sqrt{3}i^2}{1+1} = \\ &\quad \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\,i}}\end{aligned}$$

På polarform:
$1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, $1+\sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$ slik at

$$\begin{aligned}\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\,z &= 2e^{i\pi/3} \\ z &= \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\,e^{i[\pi/3-(-\pi/4)]} = \underline{\underline{\sqrt{2}\,e^{i7\pi/12}}}\end{aligned}$$

Oppgåve 2

Newtons metode går ut på å løyse likninga $f(x) = 0$ ved å iterere på formelen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad .$$

Om vi samanliknar dette uttrykket med linje 6 i skriptet, ser vi at må ha at $f(x) = e^x + \sin x + 1.6x - 7$ og $f'(x) = e^x + \cos x + 1.6$. Om vi deriverar uttykket for $f(x)$, ser vi at vi fatisk får $e^x + \cos x + 1.6$ for $f'(x)$, så dette stemmer. Likninga vi forsøker å løyse er altså

$$\underline{\underline{e^x + \sin x + 1.6x - 7 = 0}} \quad .$$

Presisjonen i løysinga er bestemt av parameteren `pres`. Av `while`-løkka ser vi at iterasjonen stoppar når $|x_{n+1} - x_n| \leq \text{pres}$. I linje 3 er `pres` sett til å vere 0.1. Om vi vél ein lågare (positiv) verdi for `pres`, bør vi få eit meir nøyaktig svar.

Oppgåve 3

a) Vi skal finne den maksimale verdien g kan ha. Maksimalverdiar kan vere randpunkt eller punkt der den deriverte skiftar forteikn frå positiv til negativ. Vi deriverar:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 + 0.1\left(e^{0.1x} \cdot 0.1(10x - x^2) + e^{0.1x}(10 - 2x)\right) = \\ & \quad 1 + 0.1e^{0.1x} + \left(x - 0.1x^2 + 10 - 2x\right) = 1 + 0.1e^{0.1x}(10 - x - 0.1x^2) \end{aligned}$$

Sidan $g'(0) = 1 + 0.1 \cdot 10 = 2 > 0$, vil ikkje randpunktet i $x = 0$ vere eit maksimalpunkt. g' må difor endre forteikn for at g skal vere maksimal. Sidan både g og g' er kontinuerlege, må $g'(x)$ vere 0 der dette skjer. Altså:

$$\underline{1 + 0.1e^{0.1x}(10 - x - 0.1x^2) = 0} \quad .$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g - k\,v = -k(v + g/k) \\ \frac{dv}{v + g/k} &= -k\,dt \\ \int \frac{dv}{v + g/k} &= \int -k\,dt \\ \ln|v + g/k| &= -kt + C_1 \\ v + g/k &= Ce^{-kt} \qquad (C = \pm e^{C_1}) \\ v &= Ce^{-kt} - \frac{g}{k} = Ce^{-0.1t} - \frac{10}{0.1} = Ce^{-0.1t} - 100 \end{aligned}$$

Initialkrav: $v(0) = v_0 = 15$ (med m/s som eining). Det gir:

$$\begin{aligned} 15 &= Ce^0 - 100 \\ C &= 15 + 100 = 115 \end{aligned}$$

Vi får at

$$\underline{v(t) = 115\,e^{-0.1t} - 100} \quad .$$

c) Vi let $h(t)$ vere høgda kula har over bakken, målt i meter, etter t sekund. Vi veit at $h(0) = 2$ og at $h'(t) = v(t)$ der $v(t)$ er gitt over. Dermed har vi at[1]

$$h(t) = \int v(t)\,dt = \int \left(115\,e^{-0.1t} - 100\right)\,dt = -\frac{115}{0.1}\,e^{-0.1t} - 100t + C =$$
$$-1150\,e^{-0.1t} - 100t + C \quad .$$

Vi får bestemt C ved initialkravet:

$$\begin{aligned} h(0) &= 2 \\ -1150\,e^0 - 0 + C &= 2 \\ C &= 2 + 1150 = 1152 \quad . \end{aligned}$$

Dermed får vi at $h(t) = -1150e^{-0.1t} - 100t + 1152$. Når kula treff bakke er høgda null – altså skal vi ha at $h(t) = 0$. Det gir denne likninga:

$$\underline{\underline{-1150\,e^{-0.1t} - 100t + 1152 = 0}} \quad .$$

Oppgåve 4

a)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

A er ei 3×3-matrise, B er ei 2×3-matrise. Sidan dei har ulike format, er ikkje summen av dei, $A + B$, definert. Vidare, sidan A har 3 søyler og B har 2 rekker, er heller ikkje produktet AB definert.

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 2\cdot(-3) + 0 - 2 & 2 + 0 - (-2) & 2 + 0 - (-1) \\ 4\cdot(-3) + 3 + 2\cdot 2 & 4 + 3\cdot 2 + 2\cdot(-2) & 4 + 0 - 2 \end{bmatrix} =$$
$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} -8 & 4 & 3 \\ -5 & 6 & 2 \end{bmatrix}}}$$

[1] Alternativt kan ein implementere initialkravet direkte ved å sette opp uttrykket $h(t) - h(0) = \int_0^t v(t')\,dt'$.

$$2B - 3C = 2\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 9 & 15 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 0-3 & -2-(-6) \\ 8-9 & 6-15 & 4-(-6) \end{bmatrix} =$$
$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & -9 & 10 \end{bmatrix}}}$$

b)

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$-(7\cdot(-1) - 1\cdot(-6)) = \underline{\underline{1}}$$

Determinanten til A er ulik 0. Difor er A invertibel.

c) Vi rekkereduserar totalmatrisa for likningssystemet til trappeform:

$$\begin{bmatrix} 2 & a & 3 \\ 1 & 3 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & b \\ 2 & a & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & b \\ 0 & a-6 & 3-2b \end{bmatrix}$$

i) Dersom $a-6 \neq 0$, vil vi få eit leiande tal både i søyle 1 og 2, og x_1 og x_2 vil bli eintydig bestemt. Vi får altså eintydig løysing når $a \neq 6$.

Dersom $a = 6$, vil totalmatrisa på trappeform sjå slik ut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & b \\ 0 & 0 & 3-2b \end{bmatrix} \quad .$$

For at dette skal tilsvare eit konsistent likningssystem, må vi kreve at $3-2b = 0$, eller at $b = 3/2$. Vi ser også at x_2 vil bli verande ubestemt sidan der ikkje er noko leiande tal i søyle 2.

ii) Vi får uendeleg mange løysingar når $a = 6$ og $b = 3/2$.

iii) Dersom $3-2b \neq 0$, vil likningssystemet bli inkonsistent. Vi har altså inga løysing når $a = 6$ og $b \neq 3/2$.

Oppgåve 5

x	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	2.000	2.301	2.243	1.938	1.546

a) Vi brukar midtpunktsformelen for numerisk derivasjon:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad .$$

Her er $h = 0.5$. Vi får

$$f'(0.5) \approx \frac{f(1) - f(0)}{2 \cdot 0.5} = 2.243 - 2.000 = \underline{\underline{0.243}} \quad .$$

b) Vi brukar trapesmetoden:

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx h\left(\frac{1}{2}f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5) + \frac{1}{2}f(2)\right) =$$
$$0.5\,(0.5 \cdot 2.000 + 2.301 + 2.243 + 1.938 + 0.5 \cdot 1.546) = 4.1275 \approx \underline{\underline{4.128}} \quad .$$

c)

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\cos(0.9x) + x \\
f'(x) &= 2(-\sin(0.9x)) \cdot 0.90 + 1 = -1.8\sin(0.9x) + 1 \\
f'(0.5) &= -1.8\sin(0.9 \cdot 0.5) + 1 = \underline{\underline{-1.8\sin 0.45 + 1}} \approx 0.2171 \\
\int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^2 (2\cos(0.9x) + x)\,dx = \left[\frac{2}{0.9}\sin(0.9x) + \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \\
&\ \frac{20}{9}\sin(0.9 \cdot 2) + \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 0 = \underline{\underline{\frac{20}{9}\sin 1.8 + 2}} \approx 4.1641
\end{aligned}$$

Feilen i estimatet frå a) blir $|0.243 - 0.2171| = 0.0259 \approx \underline{\underline{0.026}}$.
Relativ feil: $0.0259/0.2171 \approx 12\%$.

Feilen i estimatet frå b) blir $|4.1275 - 4.1641| = 0.0366 \approx \underline{\underline{0.037}}$.
Relativ feil: $0.0366/4.1641 \approx 0.88\%$.

Oppgåve 6

a)

$$\begin{aligned}
y' + \frac{\sin x}{y} &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{\sin x}{y} \\
y\,dy &= -\sin x\,dx \\
\int y\,dy &= \int -\sin x\,dx \\
\frac{1}{2}y^2 &= \cos x + C_1 \\
y^2 &= 2\cos x + C \quad (C = 2C_1) \\
y &= \underline{\underline{\pm\sqrt{2\cos x + C}}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y' &= x \sin x^2 \\ y &= \int x \sin x^2 \, dx \end{aligned}$$

Variabelbyte:

$$u = x^2, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{1}{2x} du$$

$$y = \int x \sin x^2 \, dx = \int x \sin u \, \frac{1}{2x} \, du = \frac{1}{2} \int \sin u \, du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C \quad .$$

Initialkravet $y(0) = 1$ gir at

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cos 0 + C &= 1 \\ C &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad . \end{aligned}$$

Dermed får vi løysinga

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{2} \cos x^2 + \frac{3}{2}}} \quad .$$

c) Eulers metode går ut på estimere løysinga av eit 1. ordens initialverdiproblem, gitt på forma

$$y' = F(x, y) \quad \text{med initialkravet} \quad y(x_0) = y_0$$

Ein estimerar $y(x_n)$ slik

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + F(x_n, y_n) \cdot h \quad \text{der} \\ x_n &= x_0 + n \cdot h \quad . \end{aligned}$$

y_0 er gitt ved initialkravet. For liten nok h vil vi ha at $y_n \approx y(x_n)$.

I skriptet ser vi at initialkravet er gitt i linje 1 og 3: $x_0 = 0$ og $y_0 = 1$. Om vi samanliknar formelen over med linje 15 og 16, ser vi at

$$F(x_n, y_n) = \sqrt{y_n} + \cos x_n \quad .$$

(Variabelen `yD` tilsvarar y'.) Initialverdieproblemet som skriptet freistar å løyse er altså

$$\underline{\underline{y' = \sqrt{y} + \cos x, \quad y(0) = 1}} \quad .$$

Oppgåve 7

Vi skal bestemme matrisa A slik at $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$. Vi veit at A oppfyller

$$A = [T(\mathbf{e}_1)|T(\mathbf{e}_2)]$$

der einingsvektorane

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Vi veit at transformasjonen T er lineær. Difor har vi at

$$\begin{aligned} T(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}) &= T(2\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2) = 2\,T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \\ T(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}) &= T(5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) = 5\,T(\mathbf{e}_1) + 3\,T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Sidan $T(\mathbf{x})$ skal ligge i $\mathbb{R}^3$, kan vi skrive

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad .$$

Om vi set dette inn i likningane over, får vi tre likningssystem – eitt for kvar av komponentane. Koeffisientmatrisa er den same for alle tre:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Vi kan løyse alle tre ved å rekkeredusere på ei stor totalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 15 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 15 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -15 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad .$$

Dermed får vi at $x_1 = 9$, $y_1 = 1$, $z_1 = 2$, $x_2 = -15$, $y_2 = -2$ og $z_2 = -3$ slik at

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 9 & -15 \\ 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}}} \quad .$$

Alternativt kan vi bruke insettingsmetoden. Sidan

$$2T(\mathbf{e}_1) + T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

har vi at

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2T(\mathbf{e}_1) \quad .$$

Vi set dette inn i likninga

$$5\,T(\mathbf{e}_1) + 3\,T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

slik at vi får at

$$\begin{aligned}
5\,T(\mathbf{e}_1) + 3\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2T(\mathbf{e}_1)\right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
(5 + 3\cdot(-2))\,T(\mathbf{e}_1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
-T(\mathbf{e}_1) &= \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \\
T(\mathbf{e}_1) &= \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad .
\end{aligned}$$

Dermed får vi også bestemt $T(\mathbf{e}_2)$,

$$T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad ,$$

og standarmatrsia blir

$$A = [T(\mathbf{e}_1)|T(\mathbf{e}_2)] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 9 & -15 \\ 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}}} \quad .$$

Ein kan også løyse oppgåva ved hjelp av invertering. Vi veit at

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

eller, skrive som ei matriselikning:

$$A\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

slik at

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2\cdot 3 - 5\cdot 1}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 9 & -15 \\ 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}}} \quad .$$