EKSAMEN I MATEMATIKK 1000

Oppgave 1

a) Finn den deriverte av disse funksjonene:
$f(x) = x^3 e^{5x}$ og $g(x) = \ln(\tan(x)) + x^3$.

b) Finn de følgende ubestemte integralene:
i) $\int (x^3 + xe^{-x^2})\, dx$ og ii) $\int (\cos^2 x \sin x\, dx$.

c) Finn de følgende bestemte integralene:
i) $\int_{-1}^{1} 2x \cos(3x)\, dx$ og ii) $\int_0^1 x^2 e^{3x}\, dx$.

d) Løs ligningene nedenfor. Svaret i det andre tilfellet skal skrives på polarform eller på kartesisk form:
i) $\ln(x^2 - 3x + 3) = 0, x \in \mathbb{R}$, og ii) $(3 + i)z = 2 + \sqrt{5}i, \quad i = \sqrt{-1}, z \in \mathbb{C}$.

Oppgave 2

Det følgende ukommenterte skriptet er en implementering av Newtons metode:

```
1      x0 = 0.1 ;
2      x =  x0 ;
3      while  (abs(exp(exp(x))+log(x)) >= 0.001)
4        x = x - (exp(exp(x)) + log(x)) ./ (exp(exp(x)).* exp(x) + 1./x) ;
5      end
6      x
```

Skriptet kan kjøres i octave eller MATLAB. `abs(x)` regner ut absoluttverdien (tallverdien) $|x|$ til argumentet `x`, `exp(x)` gir e^x mens `log(x)` gir den naturlige logaritmen $\ln(x)$. Du kan referere til linjenummerne til venstre i svaret ditt.

Skriv ned ligningen vi forsøker løse med denne koden. Hvordan kan vi ved en liten justering av skriptet få et mer nøyaktig svar?

Oppgave 3

Et fiskesnøre trekkes inn med en hastighet på $0.3m/s$. Tuppen av fiskestangen holdes hele tiden $2m$ over vannflaten, snøret er alltid stramt, sluken ligger hele tiden i vannskorpen, og den trekkes vinkelrett inn mot land. Hvor fort nærmer sluken seg land når avstanden fra tuppen og ut til sluken er $5m$?

Oppgave 4

a) Gitt disse matrisene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

regn ut (om uttrykkene er definert) $A+B$, AB, BA og $2B-5C$. Dersom noen av uttrykkene ikke er definert, skal du forklare hvorfor.

b) Regn ut determinanten til matrisen A. Bruk svaret til å forklare at A er invertibel.
c) Finn den inverse matrisen A^{-1}.
d) Gitt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= b \end{aligned}$$

bestem parameterne a og b slik at systemet har i) én éntydig løsning, ii) uendelig mange løsninger og iii) ingen løsning.

Oppgave 5

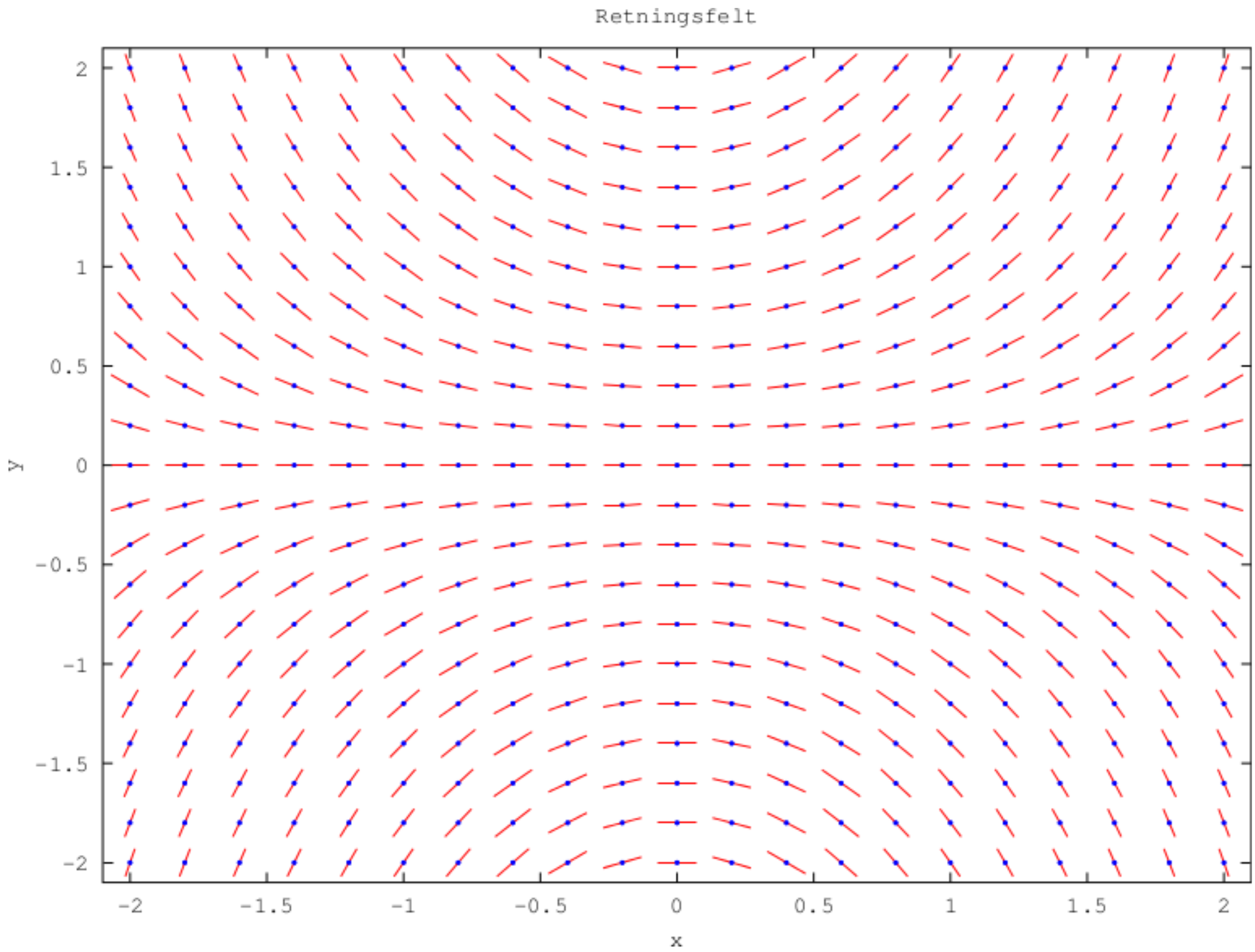
a) Vis detaljert at løsningen $y(x)$ av differensialligningen $y' = -\frac{5y}{8+y}$ tilfredstiller ligningen $8\ln(y(x)) + y(x) = -5x + C$ for en konstant $C \in \mathbb{R}$.
b) Løs initialverdiproblemet $y'' + y = \sin(3x), \quad y'(0) = y(0) = 1$
c) På slutten av oppgavesettet er det gitt en figur med tittel "Retningsfelt" som gir retningsfeltet for en differensialligning på formen $y' = F(x, y)$. Figuren er repetert to ganger slik at du kan bruke den ene som kladd. Du skal i) forklare hva et retningsfelt er og hvordan det kan brukes til å skissere tilnærmede løsninger for en differensialligning, ii) tegne inn i retningsfeltet tre løsninger, en du velger selv, en som går gjennom punktet $(x, y) = (-1.5, -0.5)$ og en som går gjennom punktet $(x, y) = (-2, 1.5)$.
d) Skriptet nedenfor, som kan kjøres i octave eller MATLAB, estimerer løsningen av et initialverdiproblem. Hvilket? i) Om vi antar at skriptet i utgangspunktet gir en nokså presis løsning, hvordan kan vi modifisere det for å finne en mere presis løsning? ii) Hvordan kan vi modifisere skriptet for å finne en løsning som starter i punktet $(x, y) = (0.0, 2.5)$?

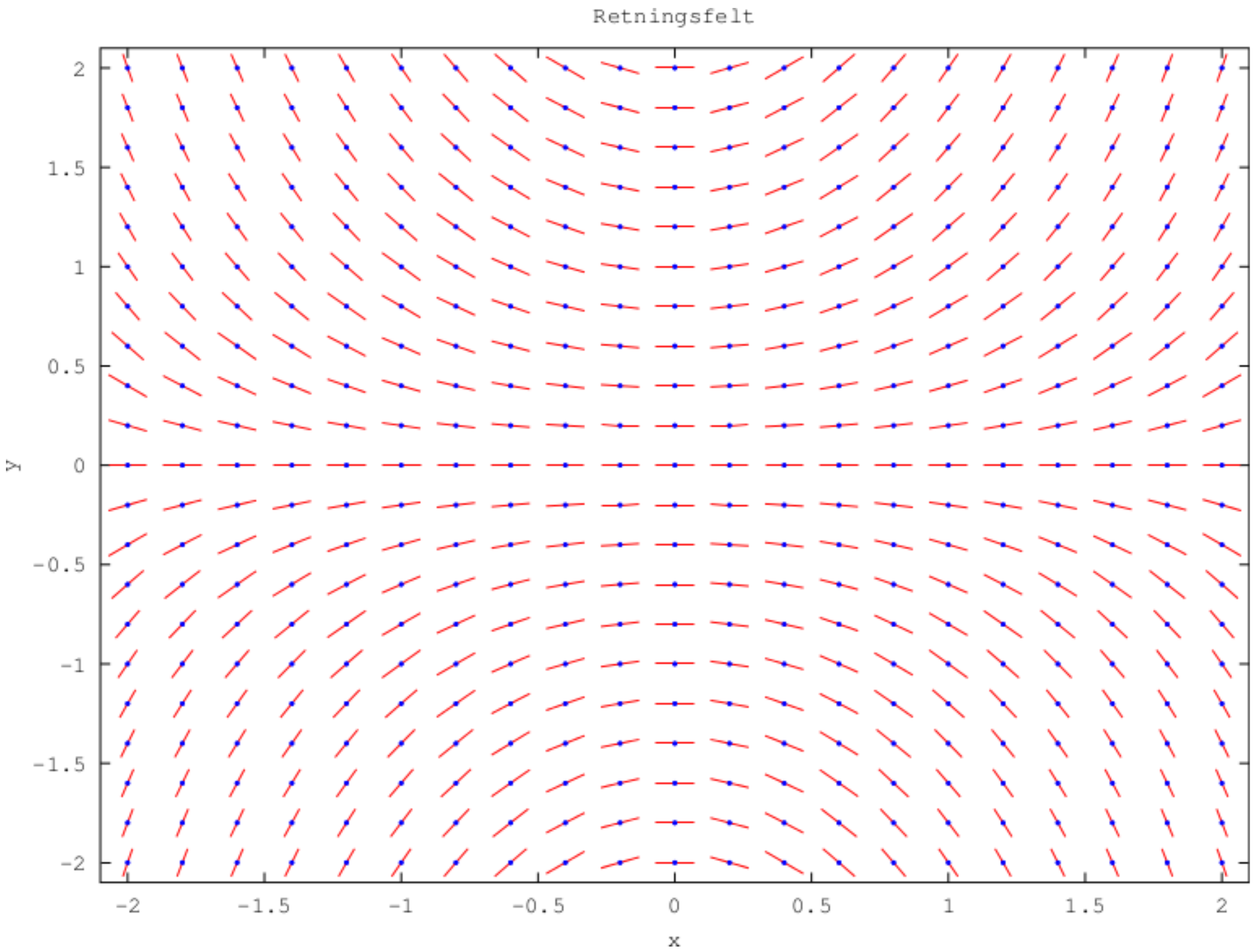
```
x0=0.0;
xsiste=10.0;
y0=1.0;
n=40;  % antall steg
h = (xsiste-x0)./n ; % steglengden
x = x0:h:xsiste;
y=zeros(1,n+1) ; % initialiserer y
y(1)=y0;
F = @(x,y) (sin(x) .* cos(y) )./(x+1) ;
for k=1:n
   y(k+1) = y(k) + F(x(k), y(k)) .* h ;
end

plot(x,y)
```

Oppgave 6

Den lineære transformasjonen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ representerer refleksjon i planet $\mathbb{R}^2$ gjennom linjen $y = x$. Finn standardmatrisen til T.


Retningsfelt
y
x
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2


Retningsfelt
x
y
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2