EKSAMEN I MATEMATIKK 1000

Oppgave 1

a) Finn den deriverte av disse funksjonene:
$f(x) = x^3 e^{5x}$ og $g(x) = \ln(\tan(x)) + x^3$.

b) Finn de følgende ubestemte integralene:
i) $\int (x^3 + xe^{-x^2})\,dx$ og ii) $\int \cos^2 x \sin x\,dx$.

c) Finn de følgende bestemte integralene:
i) $\int_{-1}^{1} 2x\cos(3x)\,dx$ og ii) $\int_0^1 x^2 e^{3x}\,dx$.

d) Løs ligningene nedenfor. Svaret i det andre tilfellet skal skrives på polarform eller på kartesisk form:
i) $\ln(x^2 - 3x + 3) = 0, x \in \mathbb{R}$, og ii) $(3+i)z = 2 + \sqrt{5}i, \quad i = \sqrt{-1}, z \in \mathbb{C}$.

Løsningsforslag.

a) $f'(x) = 3x^2 e^{5x} + 5x^3 e^{5x}$
$g'(x) = \frac{1}{\tan x \cos^2 x} + 3x^2$.

b) i) $\int (x^3 + xe^{-x^2})\,dx = \frac{1}{4}x^4 + (-\frac{1}{2})\int e^u\,du = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}e^{-x^2} + C$.
ii) $\int \cos^2\, x \sin\, x\,dx = \int u^2 \cdot -(-\sin\, x\,dx) = -\int u^2\,du = -\frac{1}{3}u^3 + C = -\frac{1}{3}\cos^3\, x + C$.

c) i) $\int_{-1}^{1} 2x\cos\, 3x\,dx = 0$
ii) $\int_0^1 x^2 e^{3x}\,dx = \left[x^2 \frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\frac{1}{3}e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{3}\int_0^1 xe^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{3}\left(\left[x\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}e^{3x}\,dx\right) = \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^3 - \left[\frac{1}{3}\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1\right) = \frac{1}{27}(5e^3 - 2)$

d) i) $\ln(x^2 - 3x + 3) = 0$
$x^2 - 3x + 3 = 1$
$x = 1$ eller $x = 2$.
ii) $z = \frac{6+\sqrt{5}}{10} + i\frac{3\sqrt{5}-2}{10}$.

Oppgave 2

Det følgende ukommenterte skriptet er en implementering av Newtons metode:

```
1      x0 = 0.1 ;
2      x =  x0 ;
3      while  (abs(exp(exp(x))+log(x)) >= 0.001)
4        x = x - (exp(exp(x)) + log(x)) ./ (exp(exp(x)).* exp(x) + 1./x) ;
5      end
6      x
```

Skriptet kan kjøres i octave eller MATLAB. `abs(x)` regner ut absoluttverdien (tallverdien) $|x|$ til argumentet `x`, `exp(x)` gir e^x mens `log(x)` gir den naturlige logaritmen $\ln(x)$. Du kan referere til linjenummerne til venstre i svaret dit.

Skriv ned ligningen vi forsøker løse med denne koden. Hvordan kan vi ved en liten justering av skriptet få et mer nøyaktig svar?

Løsningsforslag. Skriptet løser ligningen $f(x) = 0$ hvor $f(x) = e^{e^x} + \ln(x)$.
Vi kan få en mere presis løsning ved å erstatte tallet 0.001 i linje 3 med et mindre, men positivt tall, f.eks. 0.0000001. Dette tallet angir toleransen i løsningen.

Oppgave 3

Et fiskesnøre trekkes inn med en hastighet på $0.3m/s$. Tuppen av fiskestangen holdes hele tiden $2m$ over vannflaten, snøret er alltid stramt, sluken ligger hele tiden i vannskorpen, og det trekkes vinkelrett inn mot land. Hvor fort nærmer sluken seg land når avstanden fra tuppen og ut til sluken er $5m$?

Løsningsforslag. Her kan vi først tegne en figur, og så bruke Pythagoras læresetning. La avstanden fra tuppen av fiskestangen til sluken (ved tid t) være $s(t)$ og avstanden fra sluken og inn til land (langs vannflaten) være $x(t)$. Da finner vi $s(t)^2 = x(t)^2 + 2^2$, og ved implisitt derivasjon finner vi $2s(t)s'(t) = 2x(t)x'(t) + 0$. Vi finner da farten som $x'(t) = \frac{s(t)s'(t)}{x(t)} = \frac{5 \cdot 0.3}{\sqrt{21}} \approx 0.32733$.

Oppgave 4

a) Gitt disse matrisene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

regn ut (om uttrykkene er definert) $A+B$, AB, BA og $2B-5C$. Dersom noen av uttrykkene ikke er definert skal du forklare hvorfor.

b) Regn ut determinanten til matrisen A. Bruk svaret til å forklare at A er invertibel.

c) Finn den inverse matrisen A^{-1}.

d) Gitt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= b \end{aligned}$$

bestem parameterne a og b slik at systemet har i) én éntydig løsning, ii) uendelig mange løsninger og iii) ingen løsning.

Løsningsforslag.

a) $A + B$ er ikke definert siden A og B ikke har samme dimensjoner.
AB er ikke definert siden A har 3 søyler mens B har bare 2 rader.
$BA = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 15 & 39 & 44 \end{pmatrix}$
$2B - 5C = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 18 \\ 8 & -19 & 14 \end{pmatrix}$.

b) $\det(A) = 1$

c) A er invertibel siden $\det(A) \neq 0$. Den inverse kan finnes ved rekkereduksjon:
$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) Vi kan først skrive ligningssystemet på matriseform med koeffisientmatrise $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ og høyresidevektor $c = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ og da får ligningssytemet formen $Ax = c$. Vi finner først at determinanten til A er null bare dersom $a = 2$, så for alle $a \neq 2$ har systemet éntydig løsning. Dersom $a = 2$ må vi undersøke nøyere, siden svaret nå avhenger av høyresiden også. Vi finner at dersom $b = 2$ har vi uendelig mange løsninger, og for alle andre verdier av b er systemet inkonsistent, og det finnes altså ingen løsninger.

Oppgave 5

a) Vis detaljert at løsningen $y(x)$ av differensialligningen $y' = -\frac{5y}{8+y}$ tilfredstiller ligningen $8\ln(y(x)) + y(x) = -5x + C$ for en konstant $C \in \mathbb{R}$.

b) Løs initialverdiproblemet $y'' + y = \sin(3x), \qquad y'(0) = y(0) = 1$

c) På slutten av oppgavesettet er det gitt en figur med tittel "Retningsfelt" som gir retningsfeltet for en differensialligning på formen $y' = F(x, y)$. Figuren er repetert to ganger slik at du kan bruke den ene som kladd. Du skal i) Forklare hva et retningsfelt er og hvordan det kan brukes til å skissere tilnærmede løsninger for en differensialligning, ii) Tegne inn i retningsfeltet tre løsninger, en du velger selv, en som går gjennom punktet $(x, y) = (-1.5, -0.5)$ og en som går gjennom punktet $(x, y) = (-2, 1.5)$.

d) Skriptet nedenfor, som kan kjøres i octave eller MATLAB, estimerer løsningen av et initialverdiproblem. Hvilket? i) Om vi antar at skriptet i utgangspunktet gir en nokså presis løsning, hvordan kan vi modifisere det for å finne en mere presis løsning? ii) Hvordan kan vi modifisere skriptet for å finne en løsning som starter i punktet $(x, y) = (0.0, 2.5)$?

```
x0=0.0;
xsiste=10.0;
y0=1.0;
n=40;  % antall steg
h = (xsiste-x0)./n ; % steglengden
x = x0:h:xsiste;
y=zeros(1,n+1) ; % initialiserer y
y(1)=y0;
F = @(x,y) (sin(x) .* cos(y) )./(x+1) ;
for k=1:n
   y(k+1) = y(k) + F(x(k), y(k)) .* h ;
end

plot(x,y)
```

Løsningsforslag.

a) Generell løsning kan finnes ved metoden for separable ligninger. Omskriv først som

$$
\begin{aligned}
y'\frac{8+y}{y} &= -5 && (1)\\
\int \frac{y'(8+y)}{y}\,dy &= -5\int dx = -5x + C && (2)\\
\int \frac{8+y}{y}\,dy &= -5x + C && (3)\\
8\int \frac{dy}{y} + \int dy &= -5x + C && (4)\\
8\ln(y(x)) + y(x) &= -5x + C && (5)
\end{aligned}
$$

b) Vi starter med å finne karakteristisk ligning, som er $r^2 + 1 = 0$, som har løsninger $r = \pm i$. Da har vi at generell løsning av den tilsvarende homogene ligningen er

$$y = e^{ax}(B\cos x + C\sin x) = (B\cos x + C\sin x)$$

siden $a = 0$ (realdelen av løsningen til karakteristisk ligning). Vi kan gjette at en partikulær løsning av den inhomogene ligningen har formen $y(x) = R\cos 3x + S\sin 3x$ og ved derivasjon, og sette inn i ligningen finner vi endelig $R = 0$, og $S = -1/8$. Så den partikulære løsningen vi finner er

$$y(x) = -\frac{1}{8}\sin 3x.$$

Det viser at den generelle løsningen av den inhomogene ligningen også kan skrives som

$$y(x) = A\cos x + B\sin x - \frac{1}{8}\sin 3x.$$

Nå kan vi bruke de gitte initialbetingelsene og finner $A = 1, B = 11/8$. Løsningen av initialverdiproblemet blir dermed

$$y(x) = \cos x + \frac{11}{8}\sin x - \frac{1}{8}\sin 3x.$$

c) Retningsfelt: Se den scannede skissen lagt sist i løsningsforslaget. Forklaring, hva er et retningsfelt? Retningsfelt er en figur i et koordinatsystem med $x-$akse og $y-$akse hvor i et et valgt grid av verdier tegner små linjestykker med stigningstall lik $F(x, y)$, altså lik den deriverte til en løsningskurve som går gjennom punktet. En løsningskurve har da egenskapen at den er overalt tangent til de små linjestykkene.

d) Skript for Eulers metode: Løser initialverdiproblemet $y' = F(x, y)$ hvor $F(x, y) = \frac{\sin x \cos y}{x+1}$, og vi setter kravet $y(0) = 1$. Skriptet kan modifiseres for 'gi en mer presis løsning ved å endre i linje 4, sette antall steg n til en høyere verdi. ii) For å finne en løsning som starter i punktet $(x, y) = (0.0, 2.5)$, kan vi endre $x0$ i linje 1 og $y0$ i linje 3.

Oppgave 6

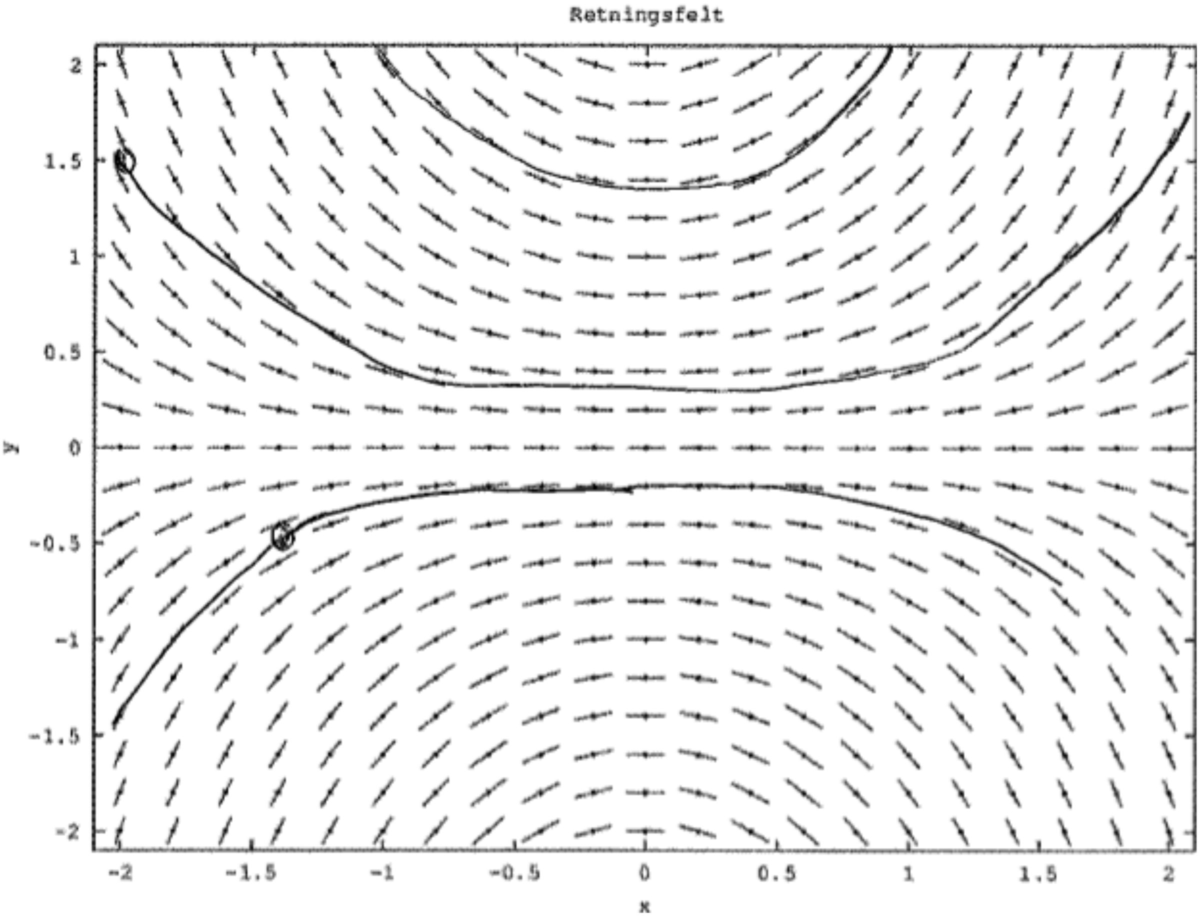
Den lineære transformasjonen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ representerer refleksjon i planet $\mathbb{R}^2$ gjennom linjen $y = x$. Finn standardmatrisen til T.

Løsningsforslag. Her hjelper det å tegne en figur! Betegn standardmatrisen til T med A. Vi finner A ved å se hvordan T virker på standard enhetsvektorene i planet, e_1 og e_2. Finner $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

VEKTLEGGING PR. OPPGAVE VED SENSUR

Ved sensur ble brukt følgende maksimale poeng pr oppgave:

Oppgave 1ai	2
Oppgave 1aii	2
Oppgave 1bi	2
Oppgave 1bii	2
Oppgave 1ci	2
Oppgave 1cii	2
Oppgave 1di	2
Oppgave 1dii	2
Oppgave 2a	8
Oppgave 2b	8
Oppgave 3	8
Oppgave 4a	4
Oppgave 4b	4
Oppgave 4c	4
Oppgave 4d	4
Oppgave 5a	4
Oppgave 5b	4
Oppgave 5c	4
Oppgave 5d	4
Oppgave 6	8


Retningsfelt
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
y
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x