Løysingsforslag til eksamen i matematikk 1000, mai 2014

Oppgåve 1

a) i)

$$\begin{aligned} f(x) &= x\sqrt{x^2+1} = x(x^2+1)^{1/2} \\ f'(x) &= x'\,(x^2+1)^{1/2} + x\,\left((x^2+1)^{1/2}\right)' = \\ & 1\cdot(x^2+1)^{1/2} + x\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot(x^2+1)' = \\ & \sqrt{x^2+1} + \frac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}^{\,2}+x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \underline{\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln x^3 - \frac{\sin x}{x^2} = 3\ln x - \frac{\sin x}{x^2} \\ g'(x) &= 3\cdot\frac{1}{x} - \frac{(\sin x)'\cdot x^2 - \sin x\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{3}{x} - \frac{x^2\cos x - 2x\sin x}{x^4} = \\ & \underline{\frac{3}{x} - \frac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}} \end{aligned}$$

b) i) $\int(2x+3)^3\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+1}(2x+3)^{3+1}+C = \underline{\frac{1}{8}(2x+3)^4+C}$

ii) $\int 6\cos(3x)\,\sin^5(3x)\,dx$
Variabelbyte: $u=\sin(3x)$
$\frac{du}{dx} = 3\cos(3x)$ slik at $dx = \frac{1}{3\cos(3x)}\,dx$.

$$\int 6\cos(3x)\,\sin^5(3x)\,dx = \int 6\cos(3x)u^5\frac{1}{3\cos(3x)}\,du =$$
$$2\int u^5\,du = 2\cdot\frac{1}{6}u^6+C = \underline{\frac{1}{3}\sin^6(3x)+C}$$

c) i) $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{x+2}\,dx$
Polynomdivisjon:

$$\begin{array}{rcccl} & x^2 & : & (x+2) & = \; x-2+\frac{4}{x+2} \\ - & (x^2+2x) & & & \\ & ----- & & & \\ & -2x & & & \\ - & (-2x-4) & & & \\ & ----- & & & \\ & 4 & & & \end{array}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x+2}\,dx = \int_{-1}^{1} \left(x - 2 + \frac{4}{x+2} \right) dx =$$
$$\left[\frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln|x+2| \right]_{-1}^{1} =$$
$$\frac{1}{2} - 2 + 4\ln 3 - \left(\frac{1}{2} + 2 + 4\ln 1 \right) = \underline{4(\ln 3 - 1)}$$

ii) $\int_{-1}^{1} 2x\,\ln(x+2)\,dx$.
Delvis integrasjon: $\int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$.
$u = \ln(x+2) \Rightarrow u' = \frac{1}{x+2}$
$v' = 2x \Leftarrow v = x^2$.
Vi får

$$\int_{-1}^{1} 2x\,\ln(x+2)\,dx = \left[\ln(x+2)x^2\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x+2}\,dx =$$
$$\ln 3 \cdot 1 - \ln 1 \cdot 1 - 4(\ln 3 - 1) = \underline{4 - 3\ln 3}$$

Vi har her brukt svaret frå oppgåva over; $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x+2}\,dx = 4(\ln 3 - 1)$.

Oppgåve 2

$$\begin{aligned} xy' - 3y &= 2x^5\ , \quad x > 0 \\ y' - \frac{3}{x}y &= 2x^4 \end{aligned}$$

Integrerande faktor: $e^{F(x)}$ der $F'(x) = -3/x$.
Vi vél $F = -3\ln x$ (x>0) slik at $e^F = e^{-3\ln x} = (e^{\ln x})^{-3} = 1/x^3$. Vi får:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3}\left(y' - \frac{3}{x}y \right) &= \frac{1}{x^3} \cdot 2x^4 \\ \left(\frac{1}{x^3}y \right)' &= 2x \\ \frac{1}{x^3}y &= \int 2x\,dx = x^2 + C \\ y &= x^3(x^2 + C) = x^5 + Cx^3 \end{aligned}$$

Altså:

$$\underline{y(x) = x^5 + Cx^3}$$

Oppgåve 3

Lengda bilen har køyrt, Δs, er gitt ved tids-integralet av farten $v(t)$;
$\Delta s = \int_0^{10s} v(t)\,dt$. Dette integralet kan estimerast med trapesmetoden:

$\int_a^b v(t)\,dt \approx T_n = \Delta t\,(v(t_0)/2 + v(t_1) + ... + v(t_{n-1}) + v(t_n)/2)$. Her har vi at $\Delta t = 2$ s og $n = 5$:

$$\Delta s \approx 2 \text{ s}\left(\frac{0}{2} + 113 + 204 + 267 + 292 + \frac{302}{2}\right) \text{ km/h} =$$

$$2054 \ \frac{\text{km}\cdot\text{s}}{\text{h}} = 2054 \ \frac{\text{km}\cdot\text{s}}{60^2 \text{ s}} = 0.5706 \text{ km} \approx \underline{571 \text{ m}}$$

Oppgåve 4

a) Om vi roterer grafen til $y = x^2,\ x \geq 0$ om y-aksen, vil volumet *under* grafen være gitt ved formelen $V = 2\pi \int_a^b x\cdot x^2\,dx$. Her er den nedre grensa $a = 0$, og den øvre grensa b er gitt ved at $b^2 = h$, altså $b = \sqrt{h}$. Vi skal ha volumet *over* grafen. Dette får vi ved å trekke volumet under grafen frå volumet av ein sylinder med høgd h og radius $\sqrt{h}$ i grunnflata:

$$V = h\cdot\pi\sqrt{h}^2 - 2\pi\int_0^{\sqrt{h}} x^3\,dx = \pi h^2 - 2\pi\cdot\frac{1}{4}\left[x^4\right]_0^{\sqrt{h}} = \pi h^2 - \frac{1}{2}\pi\sqrt{h}^4 = \frac{\pi}{2}h^2$$

Alternativt kan vi rotere grafen til inversfunksjonen, gitt ved $y = \sqrt{x}$, om x-aksen og bruke formelen $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$:

$$V = \pi\int_0^h \sqrt{x}^2\,dx = \pi\int_0^h x\,dx = \frac{\pi}{2}\left[x^2\right]_0^h = \frac{\pi}{2}h^2$$

b) Både volumet V og høgda h er funksjoner av tida t: $V(t) = \frac{\pi}{2}(h(t))^2$. Vi bruker kjerneregelen og deriverer med omsyn på tida:

$$V'(t) = \frac{\pi}{2}\cdot 2h(t)\cdot h'(t) = \pi h h'(t) \Leftrightarrow h'(t) = \frac{V'(t)}{\pi h}$$

Med $V'(t) = 0.1$ og $h = 4$ får vi $h'(t) = \frac{0.1}{\pi\cdot 4} = \frac{1}{40\pi} \approx 0.00796$.

Høgda aukar altså med farten 0.00796 dm/s = $\underline{0.796 \text{ mm/s}}$.

c) Vi har alt funne ut at $V'(t) = \pi h\,h'$. Samtidig veit vi at vi har både eit positivt og eit negativt bidrag til $V'(t)$. Vassmengda aukar med farten 0.1 – målt i l/s, og samtidig renn det ut vatn slik at $V'(t)$ også får eit negativt bidrag som er gitt til å vere $0.1\sqrt{h}$ – også målt i l/s. Vi har altså at $V'(t) = 0.1 - 0.1\sqrt{h}$. Sidan dei to ulike uttrykka vi har for $V'(t)$ må vere like, får vi

$$-0.1\sqrt{h} + 0.1 = \pi h\cdot h' \quad .$$

Når tida går, vil vatn etterkvart renne ut med same fart som det renn in. Då vil høgda h ikkje lenger variere med tida; $h' = 0$. Om vi set dette inn i likninga over, får vi

$$-0.1\sqrt{h} + 0.1 = \pi h\cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0.1\sqrt{h} = 0.1 \Leftrightarrow h = 1$$

Vasshøgda vil altså gå mot $h = \underline{1 \text{ dm}}$.

Oppgåve 5

a) Dette er ei implementering av Newtons metode. Denne metoden går ut på å finne ei løysing av likninga $f(x) = 0$ ved fyrst å velge ein x_0 og så iterere på uttrykket $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. I fyrste linje i skriptet ser vi at at ein har vald å sette $x_0 = 1$. Iterasjonsuttrykket finn vi att i linje 8:

$$x - \frac{\sqrt{x} - \cos x^2}{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x \sin x^2}$$

Ut frå teljaren i brøken ser vi at i dette tilfellet er $f(x) = \sqrt{x} - \cos x^2$. Om dette skal stemme med Newtons metode, må vi få nemnaren i uttrykket over når vi deriverer $f(x)$. Vi sjekkar dette:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - (-\sin x^2) \cdot (x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x \sin x^2$$

Vi ser at dette stemmer. Problemet vi forsøker å løyse er altså likninga

$$\underline{\sqrt{x} - \cos x^2 = 0} \quad .$$

b) Her har det desverre snike seg inn ein feil i oppgåva. Linje 13 skulle ha vore

```
yVektor(1)=y0;
```

ikkje

```
y(1)=y0;
```

Dette er ei implementering av Eulers metode. Denne metoden går ut på estimere løysinga av initialverdiproblemet

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = x_0 \quad .$$

Når steglengda h er liten nok, vil vi ha at $y(x_n) \approx y_n$ der y_n blir funne rekursivt ved

$$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n)\, h$$

der y_0 er gitt ved initialkravet, og $x_n = x_0 + nh$. I skriptet ser vi at initialkravet er gitt i linje 2 og 3: $y(0) = 1$. Uttrykket over finn vi att i linje 18 og 19; $F(x, y) = \frac{x}{2} + 5 \sin y$. Skriptet forsøker altså å løyse dette initialverdiprolbemet:

$$\underline{y' = \frac{x}{2} + 5 \sin y, \quad y(0) = 1} \quad .$$

Oppgåve 6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

a)

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -12 & -8 \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

B og C har ulike format. Difor er ikkje uttrykket $2B - 3C$ definert.

$$\begin{aligned} BC &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 2\cdot 7 + 1\cdot 2 & 2\cdot 0 + 1\cdot(-1) & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 4\cdot 7 + 2\cdot 2 & 4\cdot 0 + 2\cdot(-1) & 4\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 16 & -1 & 3 \\ 32 & -2 & 6 \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

C har 3 søyler og B har 2 rekker. Difor er ikkje produktet CB definert.

b) Inversmatrisa til ei generell 2×2-matrise kan finnast ved formelen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Dersom determinanten $ad - bc = 0$, har ikkje matrisa nokon invers. Det er dette som skjer med B; $\det B = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{1\cdot(-1) - 2\cdot 0} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} = A$$

Matrisa A er altså sin eigen invers, og B har ikkje noko inversmatrise.

Vi løyser likninga:

$$\begin{aligned} AX + C &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ AX &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} - C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ AX &= = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ A^{-1}AX &= A^{-1} \begin{bmatrix} -6 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ X &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -10 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

c) Likningssystemet kan skrivast på forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a+2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a+4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ b+1 \end{bmatrix} \quad .$$

For at systemet ikkje skal ha eintydig løysing, må determinanten til A vere 0:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 0 & a+2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a+2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} = \\ & +(a-2)\begin{vmatrix} 0 & a+2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(a-2)(a+2) = 0 \Leftrightarrow \\ & a = \pm 2 \end{aligned}$$

Vi har her lagt -2 ganger rekke to til rekke tre for å gjere utrekninga av determinanten enklare.

Vi undersøker kva som skjer når a har verdien -2 og når a har verdien 2. Når $a = -2$, får vi denne totalmatrisa for likningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & b+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & b+1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & b-5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix}$$

Her har vi fyrst bytt om rekke ein og to, så har vi lagt -2 ganger rekke ein til rekke tre, og til slutt har vi lagt 2 ganger rekke to til rekke tre for å få matrisa på trappeform. Av den nederste rada ser vi at likningssystemet er konsistent hvis og berre hvis $b = 1$. Altså er det inkonsistent for $b \neq 1$.

Når $a = -2$, får vi denne totalmatrisa for likningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & b+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & b+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b-5 \end{bmatrix}$$

Her har vi fyrst bytt om rekke ein og to, så har vi lagt -2 ganger rekke ein til rekke tre. Av den nederste rada ser vi at vi må ha $b = 5$ for at likningssystemet skal vere konsistent; alle andre verdiar for b vil gi eit inkonsistent likningssystem.

Oppsummert: Likningssystemet er inkonsistent når $a = -2$ og $b \neq 1$ og når $a = 2$ og $b \neq 5$. Det har uendeleg mange løysingar når $a = -2$ og $b = 1$ og når $a = 2$ og $b = 5$. Det har eintydig løysing når $a \neq \pm 2$.

Oppgåve 7

Vi tenkjer oss at kvar av veggane har lengda x m og høgda h m. Dei totale byggekostnadane må vere proporsjonale med

$$K(x) = 3x^2 + x^2 + 4xh$$

der det fyrste leddet tilsvarar kostnadane med taket, det andre leddet tilsvarar kostnadane med golvet og det siste tilsvarar veggane. Sidan det totale volumet skal vere 6.76 m^3, gjeld denne samanhengen mellom x og h:

$$h \cdot x^2 = 6.75 \Leftrightarrow h = \frac{6.75}{x^2} \quad .$$

Vi skriv K litt enklare:

$$K(x) = 4x^2 + 4x \cdot \frac{6.75}{x^2} = 4\left(x^2 + \frac{6.75}{x}\right), \quad x > 0$$

Vi skal bestemme x slik at K blir minimal. K er minimal når $K'(x)$ endrar forteikn frå negativ til positiv. K' vil vere null for denne x-verdien.

$$K'(x) = 4\left(2x - \frac{6.75}{x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{6.75}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = \frac{6.75}{2} = \frac{27}{8} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$$

Dette gir høgda $h = \frac{6.75}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{27}{4}}{\frac{9}{4}} = 3$.

Veggane må altså ha lengda 3/2 m og høgda 3 m.

Oppgåve 8

$y'' + 6y' + 25y = 17e^{-2x}$

Vi startar med å løyse den homogene differensiallikninga $y'' + 6y' + 25y = 0$. Det gjer vi ved å gå ut frå at løysinga kan skrivast som ein eksponentialfunksjon: $y = e^{rx}$ slik at $y' = re^{rx}$ og $y'' = r^2e^{rx}$. Dette set vi inn i den homogene likninga:

$$r^2e^{rx} + 6re^{rx} + 25e^{rx} = 0 \Leftrightarrow e^{rx}\left(r^2 + 6r + 25\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$r = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = -3 \pm 4i$$

Den homogene likninga har då generell løysing $y_h = e^{-3x}\left(A\cos(4x) + B\sin(4x)\right)$ der A og B er vilkårlege konstantar.

Vi ynskjer å finne ei partikulær løysing av den inhomogene likninga. Vi antar at vi kan finne ei løysing på forma $y_p = ae^{-2x}$. Det gir at $y_p' = -2ae^{-2x}$ og $y_p'' = 4ae^{-2x}$. Når vi set dette inn i likninga, får vi

$$4ae^{-2x} + 6 \cdot (-2)ae^{-2x} + 25ae^{-2x} = 17e^{-2x} \Leftrightarrow 17ae^{-2x} = 17e^{-2x} \quad .$$

Sidan dette skal stemme for alle x, må vi ha at $a = 1$, slik at $y_p = e^{-2x}$. Dermed blir den generelle løysinga av differensiallikninga

$$y = y_p + y_h = \underline{e^{-2x} + e^{-3x}\left(A\cos(4x) + B\sin(4x)\right)} \quad .$$

Oppgåve 9

$y^3 + 2xy + 2x^2 = x + 4$

a) For at $P = (1, 1)$ skal ligge på kurva, må likninga vere oppfylt for $x = y = 1$. Vi undersøker om det er slik. Høgresida blir $1^3+2\cdot 1\cdot 1+2\cdot 1^2 = 5$ og venstresida blir $1+4 = 5$. Både høgre- og venstresida blir atså 5; likninga er oppfylt og P ligg på kurva K.

Stigningstalet til tangenten i punktet er gitt ved den deriverte, y'. For å finne denne deriverar vi implisitt:

$$\begin{aligned} \left(y^3 + 2xy + 2x^2\right)' &= (x + 4)' \\ 3y^2y' + 2y + 2xy' + 4x &= 1 \end{aligned}$$

Vi set inn $x = y = 1$:

$$3 \cdot 1^2 y' + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1y' + 4 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow 5y' = -5 \Leftrightarrow \underline{y' = -1}$$

For å vise at $y'' = -6/5$ i P deriverar vi igjen:

$$\begin{aligned} \left(3y^2y' + 2y + 2xy' + 4x\right)' &= 1' \\ 6y\left(y'\right)^2 + 3y^2\, y'' + 2y' + 2y' + 2xy'' + 4 &= 0 \\ 6y\left(y'\right)^2 + \left(3y^2 + 2x\right) y'' + 4y' &= -4 \end{aligned}$$

Vi set inn at $x = y = 1$ og at $y' = -1$:

$$6 \cdot 1 \cdot (-1)^2 + (3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1)y'' + 4 \cdot (-1) = -4 \Leftrightarrow 5y'' = -6 \Leftrightarrow \underline{y'' = -6/5}$$

b) Taylor-polynomet er gitt ved

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(x)(x - a)^2$$

der $a = 1$, $f(a) = 1$, $f'(a) = -1$ og $f''(a) = -6/5$. Vi får dermed

$$P_2(x) = 1 + (-1)(x - 1) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{6}{5}\right)(x - 1)^2 = \underline{2 - x - \frac{3}{5}(x - 1)^2}$$

Oppgåve 10

a) Søylene er lineært uavhengige hvis og berre hvis determinanten til matrisa er ulik 0:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -2\cdot 6-(-4)\cdot 3 = 0$$

Sidan determinanten til A er 0, er søylene lineært avhengige.

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$$

Vi kjenner igjen vektorane som blir transformert som søylene i A.

Standardmatrisa til T er lik

$$[T(\mathbf{e}_1)|T(\mathbf{e}_2)|T(\mathbf{e}_3)] \quad .$$

Hvis vi klarar å uttrykke alle tre einingsvektorane $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$ ved hjelp av vektorane $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$, vil vi klare å bestemme $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$ og $T(\mathbf{e}_3)$ ved å utnytte at T er lineær. Men vi veit jo at dei tre vektorane som vi har fått oppgitt transformasjonen av, er lineært avhengige. Vi har altså tre lineært avhengige vektorar i $\mathbb{R}^3$; vi kan *ikkje* skrive $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$ som lineærkombinasjonar av desse, og dermed kan vi heller ikkje bestemme standardmatrisa til tranformasjonen T ved hjelp av informasjonen over.

Vi kan vise dette litt meir eksplisitt. Dersom vi kan skrive til dømes $\mathbf{e}_1$ som

$$\mathbf{e}_1 = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad ,$$

kan vi finne $T(\mathbf{e}_1)$ som

$$x_1 T(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}) + x_2 T(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}) + x_3 T(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix})$$

sidan transformasjonen T er lineær. For å skrive $\mathbf{e}_1$ som ein lineærkombinasjon av søylene i A, må vi altså løyse likninga

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

som også kan skrivast som $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$.

Totalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Her har vi fyrst trukke 2 gonger rekke ein frå rekke 2. Så har vi delt rekke to på -2, og til slutt har vi trukke 3 ganger rekke 2 frå rekke tre. Totalmatrisa har eit leiande tal i søyla lengst til høgre. Likningssystemet er difor inkonsistent. Vi kan ikkje bestemme $T(\mathbf{e}_1)$ og dermed heller ikkje standardmatrisa til T.

b) Ein konsekvens av at T skal vere lineær er at transformasjonen av nullvektoren skal bli nullvektoren sjølv, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Sidan vektorane over er lineært avhengige, veit vi at null-vektoren kan skrivast som ein ikkje-triviell lineærkombinasjon av desse vektorane. Vi løyser likninga $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ for å finne ein slik linærkombinasjon. Av rekkereduksjonane over ser vi at at A er rekke-ekvivalent med

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

slik at $x_1 = -x_3$ og $x_2 = -2x_3$ medan x_3 er fri. Om vi til dømes set at $x_3 = 1$, ser vi at

$$-1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad .$$

Dermed må vi ha at

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = T(\mathbf{0}) = T(-1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}) =$$

$$-1 \cdot T(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}) - 2 \cdot T(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}) + 1 \cdot T(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}) =$$

$$-1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 + t \end{bmatrix}$$

Altså: $4 + t = 0 \Leftrightarrow \underline{t = -4}$.