Prøve i	Matte 1000
Dato:	vår 2015 (ENDRE)
Hjelpemiddel:	Kalkulator og formelark

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver har lik vekt.

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

regn ut $A + B$, AB.

LF:

Vi finner summen ved å legge sammen elementvis

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Matrisemultiplikasjon gir

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 2 & 4 \\ -8 & -1 & 11 \\ -16 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

b) Bestem inversmatrisen til A (hvis den er invertibel).

For en enhver gitt vektor $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^3$, er det sant at det finnes akkurat én vektor $\vec{x}$ som løser likninga $A\vec{x} = \vec{b}$? (Gi et moteksempel eller forklar hvorfor påstanden er sann for alle $\vec{b}$.)

LF: Matrisen A er invertibel og inversmatrisen er

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrisen A er invertibel. Derfor har likningen akkurat én løsning og den er

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

for enhver vektor $\vec{b}$.

c) Er følgende søylevektorer lineært uavhengige? Hvis ikke, uttrykk en av dem som en lineærkombinasjon av de andre to vektorene.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

LF: Determinanten til en 3×3 matrise som består av de tre vektorene er lik 0. Derfor er vektorene linært avhengige. Vi uttrykker den midterste vektoren fra de to andre. For at den andre komponenten skal bli lik 0 må da koeffisisentene til de to vektorene være henholdsvis $2a$ og $-a$. Vi ser at $a = 1$ og at den midterste vektoren er lik

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

d) En lineær transformasjon T fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$ har følgende egenskaper:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestem standardmatrisa til T.

LF: Standardmatrisen til den linære transformasjonen er en 3×2 matrise på formen

$$\begin{bmatrix} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) & T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$$

Siden T er lineær så er

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) - 2T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -13 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Standardmatrisen er derfor

$$\begin{bmatrix} -13 & 8 \\ 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2
Evaluer følgende bestemte integraler:

a) $\displaystyle\int_0^1 3x\sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}\,\mathrm{d}x$

LF: a) (Evaluere betyr å regne ut.) Vi benytter substitusjon med $u(x) = \pi x^2$. Da er $u' = 2\pi x$.

$$\int_0^1 3x\sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin(u)\frac{3}{2\pi}\,\mathrm{d}u = \frac{3}{2\pi}\left(-\cos(u)\right)|_0^\pi = \frac{3}{\pi}.$$

b) Vi forsøker med substitusjonen $u(x) = x^2 - 2$. Da er $u' = 2x$ og

$$x^3/\sqrt{x^2-2} = (u+2)u'/(2\sqrt{u}).$$

$$\int_2^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}\,\mathrm{d}x = \int_2^{14} \frac{u+2}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \int_2^{14} \frac{\sqrt{u}}{2} + \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Dette er lik

$$(1/3)u^{3/2} + 2u^{1/2}|_2^{14} = \sqrt{u}((1/3)u+2)|_2^{14} = \sqrt{14}(14/3+2) - \sqrt{2}(2/3+2) =$$

$$\frac{20\sqrt{14} - 8\sqrt{2}}{3}$$

Oppgave 3
Denne funksjonen er gitt:

$$f(x) = \ln(x+1) - e^{-x/2}\ .$$

a) Forklar hvorfor f har ett – og bare ett – nullpunkt på intervallet $[0, 2]$.

b) Bruk Newtons metode til å finne en tilnærma verdi for dette nullpunktet. La startverdien være 1 og utfør to iterasjoner.

LF: Den deriverte til funksjonen er lik

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{e^{-x/2}}{2}.$$

Siden den deriverte eksisterer i intervallet er den kontinuerlig der. Den deriverte er positiv i hele intervallet, derfor er den strengt stigende i intervallet. Funksjonsverdiene i endepunktene

$$f(0) = -1 \text{ og } f(2) = \ln(3) - e^{-3/2} > 0$$

har motsatt fortegn. Skjæringssetningen sier da at grafen må treffe x-aksen minst ett sted i intervallet. Siden funksjonen er strengt voksende så kan den ikke ha mer enn ett nullpunkt. Derfor har funksjonen akkurat ett nullpunkt på intervallet $(0, 2)$.

Newtons metode gir følgende iterative formel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\ln(x_n + 1) - e^{-x_n/2}}{\frac{1}{x_n+1} + e^{-x_n/2}/2}$$

Vi lar $x_0 = 1$ og får da $x_1 = 0.892169\ldots$ og $x_2 = 0.895004\ldots$.

Oppgave 4

a) Deriver følgende to funksjonsuttrykk med hensyn til variabelen x. Parameteren a er positiv og uavhengig av x.

$$\cos^3(2x - 4) \quad \text{og} \quad \frac{a}{x} + \frac{x}{a} + a^x + x^a$$

LF:

De deriverte er

$$\cos^3(2x - 4)' = -6\sin(2x - 4)\cos^2(2x - 4)$$

$$\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} + a^x + x^a\right)' = \frac{-a}{x^2} + \frac{1}{a} + \ln(a)a^x + ax^{a-1}$$

b) Løs likninga

$$i + (1 + \sqrt{3}i)z = 1$$

for z, og skriv løsninga på polarform, $re^{i\theta}$.

LF:

$$z = \frac{1 - i}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{2}e^{-\pi i/4}}{2e^{\pi i/3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-7\pi i/12}$$

Oppgave 5

a) Vis at en funksjon $y(x)$, definert for positive verdier x, med egenskapen at tangentlinja i $(x, y(x))$ treffer y-aksen i punktet $(0, x)$, må tilfredstille differensiallikninga

$$y' - \frac{y}{x} = -1 \ .$$

b) Bestem alle funksjoner som har egenskapen beskrevet i a) og som oppfyller at $y(1) = 3$.

LF:
a) Linjen mellom punktene $(x, f(x))$ og $(0, x)$ har stigningstall

$$\frac{f(x) - x}{x - 0} = \frac{y}{x} - 1$$

Dette skal være lik y' fra våre antakelser. Derfor må kurven $y(x)$ med de gitte egenskapene tilfredstille differensiallikningen

$$y' - \frac{y}{x} = -1 \ .$$

b) Vi skal nå forsøke å løse differensiallikningen og å finne løsningen med egenskapen $y(1) = 3$. Vi antar $x \neq 0$. Vi finner den integrerende faktoren

$$y' - \frac{y}{x} = x\left(\frac{y}{x}\right)' = -1 \ .$$

Derfor er

$$\frac{y}{x} = -\ln(x) + c$$

for positive x. Så

$$y = -x\ln(x) + cx$$

for positive x. Initialbetingelsen gir $3 = c$. Derfor er løsningen

$$y = -x\ln(x) + 3x$$

Oppgave 6
Skriptene i denne oppgava kan kjøres i MATLAB eller Octave.

a) Finn ut hva følgende skript regner ut. Finn resultatet av utregningen ved å benytte andre metoder enn å kjøre skriptet.

```
1  G=1;
2  k=3;
3  S=0;
4  for n=1:10
5     S=S+G;
6     G=G*k;
7  end
8
9  %Skriver ut resultatet
10 S
```

b) Hvilket problem forsøker dette ukommenterte skriptet å estimere løsninga av?

```
x0=1;
y0=3;
xF=7;
N=500;

h=(xF-x0)/N;
xVektor=x0:h:xF;
yVektor(1)=y0;

for i=1:N
  x=xVektor(i);
  y=yVektor(i);
  yD=-1+y/x;
  yVektor(i+1)=y+yD*h;
end

plot(xVektor,yVektor)
```

LF:

a) I `for`-løkka fra og med linje 4 til og med linje 7 blir `G` lagt til variabelen `S` for hver iterasjon. Videre skal `G` multipliseres med faktoren `k`, som er 3, hver gang. Til slutt blir summen `S` skrevet til skjerm. Om vi skriver opp de første verdiene for `n`, `G` og `S` i en tabell, får vi

n	S	G
	0	1
1	1	3
2	4	3^2
3	13	3^3

Vi summerer til og med at `n` er 10 og `G` er 3^9; for `n`$=$10 blir `G` rettnok satt til 3^{10}, men dette leddet blir aldri lagt til `S`.

Vi får altså den summen

$$S = 3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^9 = \sum_{n=0}^{9} 3^n = \underline{29524} \quad .$$

Vi kan regne dette ut direkte eller benytte at dette er en geometrisk sum og at summen er derfor er gitt ved foremelen $\frac{1-3^{9+1}}{1-3} = 29524$.

b) Vi kjenner igjen Eulers metode i linje 14. Denne går ut på å estimere løsninga av initialverdiproblemet

$$y' = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

med dette skjemaet

$$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n)h \quad ,$$

hvor $x_n = x_0 + nh$. Dersom h er tilstrekkelig liten, er $y_n \approx y(x_n)$.

Vi identifiserer funksjonen $F(x,y)$ som `yD` i linje 14. Denne, igjen, er gitt i linja over; $F(x,y) = -1 + y/x$. Initialkravet er gitt i linje 1 og 2: $y(1) = 3$.

Skriptet forsøker altså å løse dette initialverdiproblemet:

$$\underline{y' = -1 + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 3} \quad .$$

Oppgave 7

Dette er en modell for harmonisk svingning med friksjon proporsjonal med farten:

$$my'' + ly' + ky = 0 \ ,$$

hvor m er masse, l er friksjonskoeffisient og k er "stivheten" til systemet. Alle tre parametrene er positive.

a) Hvis friksjonen l er tilstrekkelig stor, vil systemet bremses opp så kraftig at det klarer bare én eller ingen svingning frem og tilbake (overkritisk eller kritisk dempning). Bestem en størrelse L slik at dette skjer presis når $l \geq L$.

b) For $l < L$ vil systemet svinge som ein trigonometrisk funksjon multiplisert med ein avtakande eksponentialfunksjon. Hva er perioden til denne trigonometriske funksjonen?

c) Vi antar nå at $m = 2$, $l = 1$ og $k = 3$ og at systemet utsettes for ei ekstern kraft gitt ved $\sin(t)$. Systemet er da beskrevet ved denne differensiallikninga:

$$my'' + ly' + ky = \sin(t) \ .$$

Beskriv alle mulige løsninger av denne.

LF:

a) Vi antar at vi kan skrive ei løsing som $y = e^{rt}$. Det gir at $y' = re^{rt}$ og $y'' = r^2e^{rt}$. Om vi setter dette inn i differensiallikninga, får vi

$$\begin{aligned} mr^2e^{rt} + lre^{rt} + ke^{rt} &= 0 \\ mr^2 + lr + k &= 0 \\ r &= \frac{-l \pm \sqrt{l^2 - 4mk}}{2m} \end{aligned}$$

Dersom $l^2 - 4mk > 0$, får vi to reelle løsninger, r_1 og r_2. Den generelle løsninga av differensiallikninga blir

$$y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad .$$

Siden $l^2 - 4mk < l^2$, vil både r_1 og r_2 være negative, bjelken vil falle til ro helt uten å svinge opp og ned.

Dersom uttrykket under rota forsvinner, $l^2 - 4mk = 0$, får vi bare én rot for den karakteristiske likninga: $r = -\frac{l}{2m}$. Den generelle løsninga blir da

$$y = e^{rt}(A + Bt) \quad .$$

Heller ikke her vil bjelken kunne svinge opp og ned mer enn én gang.

Om uttrykket under rota blir negativt, $l^2 - 4mk < 0$, får vi to komplekse løsninger: $r = a \pm ib$. Dette gir denne løsninga av differensiallikninga:

$$y = e^{at}\left(A\cos(bt) + B\sin(bt)\right)$$

– altså ei dempa svinging. For at vi *ikke* skal få ei slik løsning, må vi altså kreve at $l^2 - 4mk \geq 0 \Leftrightarrow l \geq 2\sqrt{mk}$. Dette er altså vår verdi for L:

$$\underline{L = 2\sqrt{mk}} \quad .$$

b) Vi går nå ut fra at $l < L$, altså $l^2 < 4mc$. Dermed får vi kompleks r:

$$r = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 - 4mk}}{2m} = \frac{-l \pm \sqrt{-(4mk - l^2)}}{2m} = -\frac{l}{2m} \pm \frac{\sqrt{4mk - l^2}}{2m}\,\mathrm{i} \quad .$$

Dermed blir a og b fra a) henholdsvis $-\frac{l}{2m}$ og $\frac{\sqrt{4mk-l^2}}{2m}$. I løsninga, $y = e^{at}(A\cos(bt) + B\sin(bt))$, vil både sinus- og cosinus-leddet ha periode $2\pi/b$. Dermed vil også $A\cos(bt) + B\sin(bt)$ ha denne perioden. Perioden blir altså

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{4mk-l^2}}{2m}} = \underline{\frac{4\pi m}{\sqrt{4mk - l^2}}} \quad .$$

c) Her får vi at $L = 2\sqrt{6} > l$ slik at vi får samme situasjon som i b). Vi får at $a = -\frac{1}{2\cdot 2} = 1/4$ og $b = \frac{\sqrt{4\cdot 2\cdot 3 - 1^2}}{2\cdot 2} = \sqrt{23}/4$. Dermed blir den generelle løsninga av den homogene differensiallikninga

$$y_h = e^{-t/4}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}\,t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{4}\,t\right)\right) \quad .$$

Vi må nå finne ei partikulær løsning av den inhomogene differensiallikninga. Vi antar at vi kan skrive ei løsning på forma $y_p = C\sin t + D\cos t$. Det gir at

$$\begin{aligned} y_p' &= C\cos t - D\sin t \quad \text{og} \\ y_p'' &= -C\sin t - D\cos t \quad . \end{aligned}$$

Vi setter dette inn i likninga for å bestemme koeffisientene C og D:

$$\begin{aligned} 2y_p'' + y_p' + 3y_p &= \sin t \\ 2(-C\sin t - D\cos t) + C\cos t - D\sin t + 3(C\sin t + D\cos t) &= \sin t \\ (C - D)\sin t + (C + D)\cos t &= 1\sin t + 0\cos t \end{aligned}$$

Dermed må vi ha at $C - D = 1$ og $C + D = 0$, som igjen gir at $C = 1/2$ og $D = -1/2$. Vi får altså at $y_p = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t$.

Den generelle løsninga er summen av y_h og y_p:

$$y(t) = y_h + y_p = \underline{e^{-t/4}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right)\right) + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t}.$$

Oppgave 8

a) Om en funksjon $g(x)$ er det gitt at $g(0.5) = -0.3466$ og at $g(1.5) = 0.6082$. Bruk dette til å estimere $g'(1)$.

Gitt at funksjonen det er snakk om er

$$g(x) = x \ln x \ ,$$

finn feilen i estimatet.

b) For samme funksjon $g(x)$ som i a), bestem Taylor-polynomet av tredje orden omkring $x = 1$.

c) Anta at funksjonen $f(x)$ er minst fire ganger kontinuerlig deriverbar i et åpent intervall som inneholder $x = a$.

Vis at

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right) = -f^{(2)}(a)/2$$

og at

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}\right) = 0 \ .$$

Bestem grensa

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left(f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}\right) \ .$$

LF:

a) Midtpunktsformelen for numerisk derivasjon gir:

$$g'(1) \approx \frac{g(1+0.5) - g(1-0.5)}{2\cdot 0.5} = \frac{0.6082 - (-0.3466)}{1} = \underline{0.9548}$$

Med uttrykket for $g(x)$, kan vi finne den deriverte eksakt:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1\ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 \\ g'(1) &= \ln 1 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Feilen blir altså $1 - 0.9548 = \underline{0.0452}$.

b) Vi skal bestemme

$$P_3(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{g'''(1}{3!}(x-1)^3 \quad .$$

Vi deriverer videre:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{1}{x} + 0 = x^{-1} \\ g''(1) &= 1 \\ g'''(x) &= -x^{-2} \\ g'''(1) &= -1 \end{aligned}$$

Med $g(1) = 1 \ln 1 = 0$ gir dette at

$$\underline{P_3(x) = x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3} \quad .$$

c) Ut fra forutsetningene i oppgaveteksten, gjelder følgende ved Taylors teorem:

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x)$$

hvor Taylor-polynomet $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ og $R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3$. Tallet c i uttrykket for R_2 skal ligge mellom x og a. Vi får:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)(a+h-a) + \frac{f''(c)}{2}(a+h-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(a+h-a)^3 = \\ & f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(c)}{6}h^3 \quad . \end{aligned}$$

Merk at siden $f'''(c)$ er kontinuerlig for alle c mellom a og $a+h$, må $f'''(c)$ også være begrensa. Vi bruker uttrykket over til å finne grenseverdien:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right) = \\ & \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f'(a) - \frac{f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(c)}{6}h^3 - f(a)}{h}\right) = \\ & \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f'(a) - \frac{f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(c)}{6}h^3}{h}\right) = \\ & \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f'(a) - \left(f'(a) + \frac{f''(a)}{2}h + \frac{f'''(c)}{6}h^2\right)\right) = \\ & \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(-\frac{f''(a)}{2}h - \frac{f'''(c)}{6}h^2\right) = \lim_{h \to 0}\left(-\frac{f''(a)}{2} - \frac{f'''(c)}{6}h\right) = \\ & -\frac{f''(a)}{2} - 0 = \underline{-\frac{f''(a)}{2}} \end{aligned}$$

Vi bruker det samme Taylor-polynomet – med restledd – for å finne den neste grenseverdien. Med $f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(c_2)}{6}h^3$ får vi at

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a-h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(c_1)}{6}h^3 - \\ &\left(f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(c_2)}{6}h^3\right) = \\ &2f'(a)h + \frac{f'''(c_1) + f'''(c_2)}{6}h^3 \quad , \end{aligned}$$

der c_1 ligger mellom a og $a+h$ og c_2 ligger mellom a og $a-h$.

Vi bruker dette uttrykket når vi skal bestemme grenseverdien:

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}\right) = \\ &\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f'(a) - \frac{2f'(a)h + \frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{6}h^3}{2h}\right) = \\ &\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f'(a) - \left(f'(a) + \frac{f'''(c_1) + f'''(c_2)}{12}h^2\right)\right) = \\ &\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(-\frac{f'''(c_1) + f'''(c_2)}{12}h^2\right) = \\ &-\lim_{h \to 0} \frac{f'''(c_1) + f'''(c_2)}{12}h = \underline{0} \quad . \end{aligned}$$

For å bestemme den siste grenseverdien, trenger vi Taylor-polynomet av 3. orden:

$$f(a+h) = P_3(a+h) + R_3(a+h) \quad ,$$

der

$$P_3(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3$$

og

$$R_3(a+h) = \frac{f^{(4)}(c_1)}{4!}h^4 \quad .$$

Med dette får vi at

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a-h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(c_1)}{4!}h^4 - \\ &\left(f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 - \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(c_2)}{4!}h^4\right) = \\ &2f'(a)h + \frac{f'''(a)}{3}h^3 + \frac{f^{(4)}(c_1) - f^{(4)}(c_2)}{4!}h^4 \end{aligned}$$

Som over setter vi dette uttrykket inn i grenseverdien:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left(f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}\right) =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left(f'(a) - \frac{2f'(a)h + \frac{f'''(a)}{3}h^3 + \frac{f^{(4)}(c_1)-f^{(4)}(c_2)}{4!}h^4}{2h}\right) =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left(f'(a) - \left(f'(a) + \frac{f'''(a)}{6}h^2 + \frac{f^{(4)}(c_1)-f^{(4)}(c_2)}{2\cdot 4!}h^3\right)\right) =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left(-\frac{f'''(a)}{6}h^2 - \frac{f^{(4)}(c_1)-f^{(4)}(c_2)}{2\cdot 4!}h^3\right) =$$
$$\lim_{h\to 0}\left(-\frac{f'''(a)}{6} - \frac{f^{(4)}(c_1)-f^{(4)}(c_2)}{2\cdot 4!}h\right) = \underline{-\frac{f'''(a)}{6}} \quad .$$