| | |
|---|---|
| Prøve i | Matte 1000 EMFE DAFE ELFE BYFE 1000 |
| Dato: | august 2015 |
| Hjelpemiddel: | Kalkulator og formelark |

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver har lik vekt.

**Oppgave 1**

a) Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 0.5 \end{bmatrix},$$

regn ut $-3B$, $A+B$, $BA$ og $AB$ hvis de eksisterer.

b) En lineær transformasjon $T$ fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ er gitt ved først å rotere $\pi/2$ radian i positiv retning (mot klokken) og deretter speile om $x$-aksen. Bestem standardmatrisa til $T$.

c) En lineær transformasjon $T$ har standardmatrisen

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Bestem alle vektorene som transformasjonen sender til vektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

**Oppgave 2**

En funksjon definert for alle reelle tall er gitt ved delt forskrift som følger

$$f(x) = \begin{cases} bx + 1 & x \leq 1 \\ ax^2 & 1 < x \end{cases}$$

Bestem parametrene $a$ og $b$ slik at funksjonen $f$ er deriverbar for alle $x$.

**Oppgave 3**

a) Løs likningen

$$i + (1+i)z = 0$$

for $z$, og skriv løsninga på polarform, $re^{i\theta}$.

b) Beskriv alle løsningene til følgende likning både på kartesisk og polar form

$$z^4 = -1.$$

**Oppgave 4**
Inntekstrømmen (inntekt per tidsenhet) i norske kroner (NOK) til et stort norsk selskap ved ulike tidspunkt er gitt i tabellen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Tidspunkt | 12:00 | 15:00 | 18:00 | 21:00 | 24:00 |
| Inntektsstrøm (NOK/time) | 2000 | 2500 | 3500 | 2000 | 500 |

a) Regn ut tilnærmede verdier for endringene i inntektsstrømmen klokken 15:00 og 19:30.

b) Bruk Trapesmetoden til å regne ut en tilnærmet verdi for den totale inntekten til selskapet fra kl 12:00 til kl 24:00.

**Oppgave 5**
a) Forklar hvorfor likningen

$$2xe^x + x = 10$$

har akkurat en løsning.

b) Estimer løsningen til likningen i del a) ved å benytte Newtons metode. Start med verdien $x_0 = 1.5$ og utfør to iterasjoner.

**Oppgave 6**
En kjegle plassert med spissen ned fylles med vann. Det helles i vann med en konstant rate på 1 liter per sekund. Anta kjeglen (innvendig) har høyde 1 meter og diameter 1.5 meter. Hvor fort øker vannstanden i kjeglen når vannet er kommet 60 cm opp i kjeglen? Oppgi svaret med enheten cm per sekund.

**Oppgave 7**
Regn ut følgende bestemte integraler:

a) $\displaystyle\int_0^1 x(1+x^2)^6\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

**Oppgave 8**
Beregn volumet til legemene som fremkommer ved å rotere regionen mellom grafen til $\cos(x)$ og $\sin(x)$ fra $x = 0$ til $x = \pi/4$ om

a) $x$-aksen

b) $y$-aksen

**Oppgave 9**

Finn punktet på grafen til funksjonen $y = x^2$ som har kortest avstand til linjen gitt som grafen til $y = 2x - 3$.
Tegn gjerne en figur og argumenter geometrisk.
Vis at den korteste avstanden mellom de to grafene er $2/\sqrt{5}$.

**Oppgave 10**

Skriptene i denne oppgava kan kjøres i MATLAB.

a) Forklar i detalj hva følgende skript gjør. (Gjerne linje for linje.) Finn resultatet av å kjøre skriptet.

```
A=0;
while  A  < 100
   A=A+3;
end
A
```

b) Forklar i detalj hva følgende skript gjør. (Gjerne linje for linje.)

```
f=@(x) sqrt( 1 + (x)^3 ); % definerer en funksjon f
a=0;
b=2;
n = 10;
d=(b-a)/(2*n);
S=0;
for i=1:n
   S=S + d*(f(a + (i-1)*d) + f(a + i*d)) ;
end
S
```

**Oppgave 11**

Finn alle løsningene til differensiallikningene og initialverdiproblemene

$$a) \quad y'' + 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 2$$

$$b) \quad y'' - 4y' = e^{2x} + 1$$