Prøve i Matte 1000 ELFE KJFE MAFE 1000
Dato: 02. desember 2015
Hjelpemiddel: Kalkulator og formelark

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver har lik vekt.

Oppgave 1
Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Regn ut, om mulig, summen $A+B^T$, produktet BA og determinanten $\det(A)$.

LF: Summen $A + B^T$ er lik

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}}$$

Produktet BA er lik

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -11 & 35 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}}$$

Determinanten til A er ikke definert fordi A ikke er en kvadratisk matrise.

Oppgave 2
Vi har fått i oppdrag å uttrykke en søylevektor $\mathbf{v}_4$ som en lineær kombinasjon av tre søylevektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$. Vi får oppgitt at matrisen

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$$

på redusert trappeform er lik

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Uttrykk $\mathbf{v}_4$ som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$.

LF: Vi søker skalarer x_1, x_2 og x_3 slik at

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_4$$

Dette er presis løsninger til likningssystemet

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_4$$

Totalmatrisen til dette likningssystemet er

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$$

Løsningene forblir uendra under radeoperasjoner. Derfor er

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

løsningene til likningssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Her er det bare å lese av løsningene. De er $x_1 = 2$, $x_2 = -0.3$ og $x_3 = 0.5$. Vi kan nå uttrykke $\mathbf{v}_4$ som følger

$$\underline{\mathbf{v}_4 = 2\mathbf{v}_1 - 0.3\mathbf{v}_2 + 0.5\mathbf{v}_3}$$

Oppgave 3
En lineær transformasjon fra $\mathbb{R}^2$ til seg selv er gitt ved speiling om linjen $y = x$. Bestem standardmatrisen til denne lineære transformasjonen.

LF: Den lineære transformasjonen bytter om x- og y-aksene. Totalmatrisen til den lineære transformasjonen er en 2×2-matrise hvor den først søylevektoren er transformasjonen av $\mathbf{e}_1$ og den andre søylevektoren er transformasjonen av $\mathbf{e}_2$. Totalmatrisen er derfor lik

$$\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

Oppgave 4
Finn løsningene til følgende likningssystem for alle verdier av parameteren a.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

LF: Vi utfører noen radoperasjoner for å få koeffisientmatrisen på en enklere form. Løsningene til likningsystemet er uendret under radoperasjoner. Vi trekker fra to kopier av rad to fra rad én.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hvis $a \neq -4$ er det ingen løsning. Hvis $a = -4$ da må $z = 1$ og $x + 2y = 2$. Det er derfor uendelig mange løsninger. En parametrisering er $x = 2t$, $y = 1 - t$ og $z = 1$ for reelle tall t.

Oppgave 5
Regn ut den eksakte verdien til de bestemte integralene som eksisterer. Hvis noen av integralene ikke eksisterer forklar hvorfor.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}} + \sqrt{4-2x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 |\cos(\pi x)|\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{4}{x^4}\,\mathrm{d}x$

LF: a) Vi skriver om røttene som potenser med rasjonale eksponenter

$$\int_1^2 \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}} + \sqrt{4-2x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 3 \cdot x^{-3/4} + (4-2x)^{1/2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\left[\frac{3}{1/4} x^{1/4} + \frac{(4-2x)^{3/2}}{-2 \cdot (3/2)} + c \right]_1^2 = \underline{12(\sqrt[4]{2} - 1) + 2\sqrt{2}/3}$$

b) Vi benytter substitusjonen $u = \pi x$.

$$\int_0^1 |\cos(\pi x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos(u)|\,\mathrm{d}u$$

Funksjonen $\cos(u)$ er positiv for u mellom o og $\pi/2$ og den er negative for u mellom $\pi/2$ og π. Derfor er integralet lik

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(u)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(u)\,\mathrm{d}u = \underline{\frac{2}{\pi}}$$

c) <u>Dette integralet eksisterer ikkje.</u> Integranden $\frac{4}{x^4}$ går mot uendelig når x nærmer seg 0. Vi undersøker om integralet eksisterer ved å se på det uegentlige integralet

$$\int_0^2 \frac{4}{x^4}\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0^+}\int_h^2 \frac{4}{x^4}\,\mathrm{d}x =$$

$$\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{-4}{3x^3}\right]_h^2 = \lim_{h\to 0^+}\left[\frac{-4}{3x^3}\right]_h^2 =$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{-1}{6} + \frac{4}{3h^3}$$

Grensen eksisterer ikkje, så det uegentlige integralet eksisterer ikkje.

Oppgave 6

Vi skal estimere nullpunkt til fjerdegradspolynomet

$$p(x) = x^4 - 5x + 3$$

a) Forklar hvorfor $p(x)$ har akkurat ett nullpunkt i intervallet $[0, 1]$.

b) Benytt Newtons metode til å finne en tilnærmet verdi for dette nullpunktet i $[0, 1]$. La startverdien være 1 og utfør to iterasjoner.

LF: a) Verdien til funksjonen i endepunktene av intervallet er

$$p(0) = 3 \text{ og } p(1) = -1$$

Funksjonen er kontinuerlig så ved skjæringssetningen finnes det minst en verdi x mellom 0 og 1 slik at $f(x) = 0$ (siden 0 ligger mellom -1 og 3).

Den deriverte til $p(x)$ er lik $p'(x) = 4x^3 - 5$. Denne funksjonen er mindre enn eller lik -1 for alle x mellom 0 og 1. Så funksjonen $p(x)$ avtagende på intervallet $[0, 1]$. Det er derfor ikkje mulig å ha mer enn ett nullpunkt. Vi konkluderer med at $p(x)$ har akkurat ett nullpunkt på intervallet $[0, 1]$.

b) Rekursjonsformelen vi får ved å benytte Newtons metode er

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 5x_n + 3}{4x_n^3 - 5}$$

Starter vi med $x_0 = 1$ får vi

$$x_1 = 1 - \frac{-1}{-1} = 0$$

Dette gir at

$$x_2 = 0 - \frac{3}{-5} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Etter to iterasjoner får vi $x_2 = 0.6$.

(Her er resultatet av å utføre flere iterasjoner:

$$x_3 = 0.63133\ldots \qquad x_4 = 0.6318844\ldots \qquad x_5 = 0.6318846\ldots)$$

Oppgave 7
Bestem parametrene a og b slik at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x - a & x < 1 \\ b/x & x \geq 1 \end{cases}$$

er deriverbar for alle x.

LF: Funksjonen er deriverbare vekk fra punktet $x = 1$. Den deriverte er gitt ved å derivere hvert av uttrykkene

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ -b/x^2 & x > 1 \end{cases}$$

For at funksjonen skal kunne være deriverbar i $x = 1$ må den være kontinuerlig. Funksjonen f er kontinuerlig i $x = 1$ hvis

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to 1^+} b/x = b/x|_{x=1} = \lim_{x \to 1^-} x - a$$
$$b = b = 1 - a$$

Anta dette er oppfylt slik at funksjonen er kontinuerlig. Da er den deriverte fra høyre $\lim_{x \to 1^+}(f(x) - f(1))/(x-1)$ og fra venstre $\lim_{x \to 1^-}(f(x) - f(1))/(x-1)$ gitt ved henholdsvis $1|_{x=1} = 1$ og $-b/x^2|_{x=1} = -b$. (Her benytter vi at funksjonen er kontinuerlig så $1 - a$ er lik $f(1) = b$. Da er

$$\lim_{x \to 1^-} (f(x) - f(1))/(x-1) = \lim_{x \to 1^-} (x - a - (-b))/(x-1)$$

faktisk lik $(x-a)' = 1$.)

Vi får at funksjonen er deriverbar presis når $b = 1 - a$ og når $1 = -b$. Løsningen er

$$\underline{a = 2} \quad \text{og} \quad \underline{b = -1}$$

Oppgave 8

Vi lager en beholder med høyde 8 dm ved å rotere grafen til $y(x) = x^3$ (enheter desimeter), for x mellom 0 og 2 dm, om y-aksen.

a) Vis at volumet til beholderen er $96\pi/5$ dm^3.

b) Beholderen fylles med vann. Vanntilførselen er konstant og det tar 2 minutter å fylle beholderen. Bestem endringsraten (i desimeter per minutt) til høyden til vannstanden y når den er 1 dm.

LF: a) Vi kan uttrykke x ved hjelp av y som $x = y^{1/3}$. Vi lager tverrsnitt parallelle til xz-planet. Arealet til tverrsnittet ved høyde y, for y mellom 0 og 8 desimeter, er

$$A(y) = \pi x^2 = \pi y^{2/3}$$

Volumet til rotasjonslegemet er lik integralet

$$\int_0^8 \pi y^{2/3}\,\mathrm{d}y = \left[\pi\frac{y^{5/3}}{5/3}\right]_0^8 = \left[\frac{3\pi y^{5/3}}{5}\right]_0^8 = \frac{3\pi 2^5}{5} = \underline{\frac{96\pi}{5}}$$

b) Vanntilførselsraten (endringsraten til volumet) er

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = (96\pi/5)/2 = 9.6\pi \text{ dm}^3/\text{min}$$

Kjerneregelen gir følgende kobling mellom endringsraten til høyden y og volumet med hensyn på tiden.

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Endringsraten til volumet med hensyn til høyden y er (det horisontale) tverrsnittarealet til rotasjonslegemet ved høyde y. Det er lik $A(y) = \pi y^2 = \pi y^{2/3}$. Derfor får vi at

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = 9.6\pi/(\pi y^{2/3}) \text{ dm}^3/\text{min}$$

Når høyden y er lik 1 desimeter er

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}|_{y=1} = \underline{9.6 \text{ dm/min}}$$

Oppgave 9
Hva estimeres hvis vi kjører det ukommenterte skriptet nedenfor i matlab? Forklar hvorfor nøyaktigheten til estimatet er omtrent 10^{-9}.

```
f=@(x) 3*x-x^2+sin(x)+1;
a=-1;
b=3;
N=30;
for n=1:N
    c=(a+b)/2;
    if f(c) * f(a) > 0
         a=c ;
         else b=c;
    end
end
(a+b)/2
```

LF: Dette skriptet utfører halveringsmetoden på funksjonen

$$f(x) = 3x - x^2 + \sin(x) + 1$$

med 30 itersjoner hvor vi starter med intervallet $[-1, 3]$. Skriptet skriver til sist ut punktet i midten av det siste intervallet. (Funksjon er kontinuerlig og $f(-1) = -3 + \sin(-1) < 0$ og $p(3) = 1 + \sin(3) > 0$. Fra skjæringssetningen finnes det derfor minst ett nullpunkt i intervallet.)

Lengden på det opprinnelige intervallet er 4. For hver gang vi utfører halveringsmetoden får vi et intervall hvor det er et nullpunkt og det nye intervallet er bare halvparten så brett som det foregående. Etter 30 iterasjoner får vi derfor et intervall med bredde $\frac{4}{2^{30}}$. Siden $2^{10} = 1024 > 10^3$ så er

$$2^{30} = (2^{10})^3 > 10^9$$

Derfor er bredden på intervallet mindre enn $4 \cdot 10^{-9}$. Tallet vi får oppgitt fra skriptet er tallet som ligger midt i intervallet. Avstanden til nærmeste nullpunkt i invervallet er derfor halvparten av bredden til intervallet. Avviket mellom nærmeste nullpunkt og verdien skriptet gir oss er derfor mindre enn $2 \cdot 10^{-9}$. Nøykatigheten er derfor omtrentlig (på størrelsesorden med) 10^{-9}.

Oppgave 10
Benytt numerisk integrasjon til å estimere det bestemte integralet

$$\int_1^3 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Du kan enten benytte Simpsons metode med ett (dobbelt) delintervall eller trapesmetoden med fire delintervaller. Her er en tabell med noen funksjonsverdier.

x	1	1.5	2	2.5	3
$\sin(x)/x$	0.84147	0.66499	0.45464	0.23938	0.04704

LF: La oss kalle integranden $\sin x/x$ for $f(x)$. Ved Simpsons metode med ett (dobbelt) delintervall får vi estimatet

$$S = 2 \cdot \frac{1}{6}\left[f(1) + 4 \cdot f(2) + f(3)\right] = \underline{0.90236}$$

Ved bruk av trapesmetoden med 4 delintervaller får vi

$$T = 0.5 \cdot \frac{1}{2}\left[f(1) + 2 \cdot f(1.5) + 2 \cdot f(2) + 2 \cdot f(2.5) + f(3)\right] = \underline{0.90164}$$

(Et mer nøyaktig estimat er 0.9025694576322. Vi ser at Simpsons metode gir et mer nøyaktig estimat enn trapesmetoden.)

Oppgave 11

Finn Taylorpolynomet om $x = 0$ til funksjonen

$$f(x) = 3\sin(2x)$$

til og med grad 4.

LF: Vi kan enten benytte definisjonen av Taylor polynom direkte og derivere funksjonen fire ganger. Alternativt kan vi benytte at vi kjenner Taylor polynomet til $\sin(x)$. Det er $x - x^3/6 + x^5/120 - + \cdots$. Ganger vi dette med 3 og erstatter x med $2x$ får vi at Taylor polynomet til $3\sin(2x)$ av orden 4 er

$$3(2x - (2x)^3/6) = \underline{6x - 4x^3}$$

Oppgave 12

a) Løs den lineære likningen

$$i + (1 - i)z = 2z + 1$$

med hensyn på z. Skriv løsningen på polarform, $re^{i\theta}$.

b) Regn ut nullpunktene til polynomet

$$2z^3 + 8z^2 + 10z$$

Faktoriser polynomet som et produkt av lineære faktorer.

LF: a) Vi samler ledd med z på venstre side

$$(1-i)z - 2z = +1 - i$$

Dette gir at $-(1+i)z = 1 - i$ så

$$z = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i$$

Tallet i har lengde (modulus) 1 og i polare koordinater er vinkelen $\pi/2$ radianer (90 grader) opp til hele omløp. Benytter vi Eulers formel til å skrive dette får vi

$$\underline{z = 1 \cdot e^{\pi i/2} = e^{\pi i/2}}$$

b) Vi tar ut faktorene 2 og z og får

$$2z^3 + 8z^2 + 10z = 2z(z^2 + 4z + 5)$$

Vi finner røttene til andregradspolynomet ovenfor. De er

$$-2 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5})/2 = -2 \pm i$$

Faktoriseringen er derfor

$$\underline{2z(z+2-i)(z+2+i)}$$

Oppgave 13

En beholder fylt med varmt vann, blir plassert på et bord. Opprinnelig er temperaturen $T_1 = 80$ °C. Etter en hel time er temperaturen blitt 40 °C. Temperaturen i rommet er $T_0 = 20$ °C. Anta at Newtons avkjølingslov

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_0)$$

beskriver nedkjølingen.

a) Vis at temperaturen til vannet som en funksjon av tiden er gitt ved

$$T(t) = (1 + 3e^{-kt}) \cdot 20 \text{ °C}$$

b) Regn ut hvor lang tid det tar før temperaturen i vannet synker fra 40 °C til 30 °C.

LF: a) Vi kan løse den separable differensiallikningen med initial betingelsen $T(0) = T_1$, eller vi kan bare sjekke at den oppgitt løsningen faktisk er en løsning. La oss gjøre det sistnevnte. Setter vi inn $t = 0$ får vi

$$T(0) = (1 + 3) \cdot 20 \text{ °C} = 80 \text{ °C}$$

Deriverer vi $T(t) = (1 + 3e^{-kt}) \cdot 20$ °C får vi $T'(t) = -3ke^{-kt} \cdot 20$ °C. Setter vi $T(t)$ inn i $-k(T - T_0)$ får vi

$$-k((1 + 3e^{-kt}) \cdot 20 \text{ °C} - 20 \text{ °C}) = -3ke^{-kt} \cdot 20 \text{ °C}$$

Dette er lik $T'(t)$.

b) La enhetene til tiden være timer. Vi har da at

$$40 \text{ °C} = (1 + 3e^{-k \cdot 1}) \cdot 20 \text{ °C}$$

Dette gir

$$40 - 20 = 20 = 3 \cdot 20e^{-k \cdot 1}$$

Derfor er $e^{-k} = 1/3$. Vi ønsker å finne tiden t slik at $T(t) = 30$ °C. Da er tiden det tar for vannet synker fra 40 °C til 30 °C lik $t - 1$ timer. Temperaturen er 30 grader Celsius når

$$30 = (1 + 3e^{-kt}) \cdot 20$$

så $e^{-kt} = 10/(3 \cdot 20) = 1/6$. Setter vi dette sammen får vi

$$t = \frac{-kt}{-k} = \frac{-\ln(6)}{-\ln(3)} = 1.630929\ldots$$

Tiden det tar før temperaturen i vannet synker fra 40 °C til 30 °C er derfor omtrent $1.63 - 1 = 0.63$ timer. Dette er det samme som <u>38 minutter</u>.

Oppgave 14

Finn alle løsningene til differensiallikningen

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = e^{-2x}.$$

LF: Vi løser det homogene problemet først. Anta en løsning er på formen $y = e^{rx}$. Setter vi dette inn i den homogene differensiallikningern får vi

$$(r^2 + 5r + 6)e^{rx} = 0$$

Vi har en løsning presis når $r^2 + 5r + 6 = (r+2)(r+3) = 0$. Lineære kombinasjoner av homogene løsninger er også homogene løsninger. Derfor er

$$y_h = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$$

for konstanter A og B. (Dette er alle mulige homogene løsninger. En hver initialbetingelse kan oppfylles for et passende valg av A og B.)

Vi ser nå etter én partikulær løsning. Siden e^{-2x} er en homogen løsning forsøker vi med en løsning på formen $y(x) = Kxe^{-2x}$. Deriver vi denne funksjonen får vi

$$y'(x) = Ke^{-2x} - 2Kxe^{-2x} \text{ og } y''(x) = -4Ke^{-2x} + 4Kxe^{-2x}$$

Setter vi dette inn i differensiallikningen får vi

$$-4Ke^{-2x} + 4Kxe^{-2x} + 5(Ke^{-2x} - 2Kxe^{-2x}) + 6Kxe^{-2x} =$$

$$Ke^{-2x}(-4 + 4x + 5 - 10x + 6x) = e^{-2x}$$

Dette er sant (for alle x) når $K = 1$. Løsningene til differensiallikningen er derfor

$$\underline{y(x) = xe^{-2x} + Ae^{-2x} + Be^{-3x}}$$