Eksamen i matematikk 1000, 12. august 2016

Oppgave 1
Disse matrisene er gitte:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dersom noe av det vi ber deg regne ut i deloppgavene nedenfor ikke er veldefinert, skal du kort forklare hvorfor.

a) Bestem produktene AC, BC og CB.

b) Bestem determinanten til B, $\det(B)$, og inversmatrisa til B, B^{-1}.

c) Bestem matrisa X som løser matriselikninga

$$AX = C$$

hvor matrisene A og C er gitt over.

d) For $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^3$, bestem parameteren a slik at likningssystemet under ikke har noen løsning.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & a-2 \\ a+2 & -(a+2) & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3a+6 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2
Vi tenker oss at befolkninga i et land har nokså lav reproduksjonsrate; overlatt til seg selv vil folketallet avta med 6 % per år. Men landet opplever også en jevn strøm av immigranter som gir et positivt bidrag til folketallet. Den gjennomsnittlige årlige innvandringa er på 300 000 personer per år.

På dette grunnlaget kan vi sette opp denne modellen for folketallet:

$$F'(t) = 0.3 - 0.06F(t)$$

hvor F er folketallet målt i antall millioner, og t er tida målt i år.

a) Hvis denne situasjonen varer ved, vil folketallet etter ei tid stabilisere seg. Hva vil folketallet stabililsere seg på?

b) Gitt at folketallet var 12 millioner ved starttidspunktet, $t = 0$, bestem funksjonen $F(t)$.

Oppgave 3

a) Bestem den deriverte til

$$f(x) = 3x^2 + \cos^2(2x)$$

b) Bestem det ubestemte integralet

$$\int x^2 e^x \, dx$$

c) Ei kurve er gitt implisitt ved denne likninga:

$$2x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 2y = 2$$

Vis at punktet $(1, 2)$ ligger på kurva, og bestem likninga for tangenten i dette punktet.

d) Skriv det komplekse tallet $1 - \sqrt{3}\,i$ på polarform og bruk svaret til å finne alle løsninger av likninga

$$z^3 = 1 - \sqrt{3}\,i$$

Oppgave 4

Dette skriptet beregner en sum:

```
1  a=1;               % Grenser
2  b=3;
3  f=@(x) x^3-x^2;    % Funksjon
4
5  R=0;               % Initierer R
6  N=100;             % Oppdeling
7  dx=(b-a)/N;
8
9  for i=1:N
10     x=a+(i-1)*dx;
11     R=R+f(x)*dx;   % Oppdaterer R
12 end
13
14 R                  % Skriver R til skjerm
```

Hva kalles en slik sum? Når skriptet kjøres, hva vil `R` i linje 14 nærme seg når `N` i linje 6 økes?

Oppgave 5

Bestem de generelle løsningene av følgende differensiallikninger:

a) $y'' - 2y' + 5y = 10$

b) $y' = \sqrt{2x - 1} \cdot y$

Oppgave 6

Denne funksjonen er gitt:

$$p(x) = 2 + \frac{x}{1 + e^{x-6}}$$

med definisjonsmengden $[0, 10]$. Til venstre i figuren under finner du et plott av funksjonen.

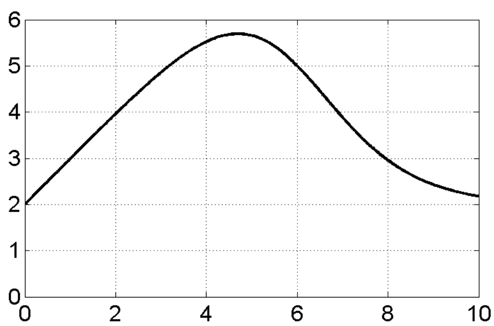
a) Den x-verdien som gir maksimal verdi for p, er bestemt av denne likninga:

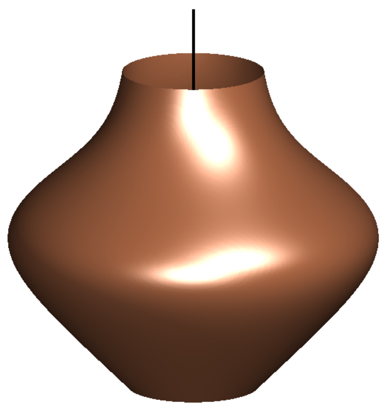
$$1 + (1 - x)e^{x-6} = 0$$

Vis hvordan man kommer fram til dette.

b) Finn ei tilnærma løsning av likninga i a) ved å utføre to iterasjoner med Newtons metode. Bruk startverdien $x_0 = 5$.

Funksjonen $p(x)$ gir profilen til en stor vase; p er avstanden fra symmetriaksen og x er lengda/høgda langs symmetriaksen – begge deler målt i dm. Se figuren.





c) Vi tenker oss at vi heller vann i vasen med farten 0.1 l/s (liter er det samme som dm^3). Forklar hvorfor volumet av vannet, $V(t)$, oppfyller

$$V'(t) = \pi(p(h))^2 h'(t) \ ,$$

der h er høgda av vannet i vasen, målt i dm, og t er tida målt i sekund. Hvor fort stiger høgda av vannet med det samme vi begynner å fylle vasen? Og hvor fort stiger høgda når høgda er 6 dm?

Oppgave 7
Den lineære transformasjonen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ roterer vektoren med vinkelen $\pi/2$ rad $= 90°$ mot klokka. En annen lineær transformasjon $U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$U\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

a) For

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

bestem $T(\vec{v})$ og $U(\vec{v})$. Bestem også standardmatrisa til hver av transformasjonene.

b) Om en tredje lineær transformasjon $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vet vi at

$$V\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ V\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } V\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Er dette nok informasjon til å bestemme standardmatrisa til V?
Vi minner om at svaret skal begrunnes.

Oppgave 8
Dette startverdiproblemet (initialverdiproblemet) er gitt:

$$y' = x + y/2, \quad y(0) = -3$$

a) Med x avgrensa til intervallet $[0, 2]$ og med steglengde $h = 0.5$, bruk Eulers metode til å finne ei tilnærma, numerisk løsning på startverdiproblemet. Altså: Estimer $y(x_1), y(x_2), y(x_3)$ og $y(x_4)$, der $x_n = n \cdot h$, ved hjelp av Eulers metode.

b) Med startkravet $y(0) = -4$ i stedet for $y(0) = -3$ gir Eulers metode eksakt riktig løsning i dette tilfellet. Hvorfor?