Utsatt eksamen i Matematikk 1000 MAFE ELFE KJFE 1000
Dato: 2. mars 2017

Løsningsforslag.

Oppgave 1
Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ og } \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Regn ut følgende matrisesummer og matriseprodukter, om mulig. Dersom det ikke er mulig, skal du kort forklare hvorfor.

$$A + B, \quad AB, \quad B - C^T, \quad B\vec{v}, \quad \vec{w}^T C.$$

LF:
A og B har ulik dimensjon slik at summen $A + B$ ikke er definert.
A og B har dimensjoner hhv 3×3 og 3×2, dvs produktet AB har dimensjon 3×2 og

$$\begin{aligned} AB = & \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 3 + 2 \times 7 + 0 \times 3 \\ 0 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 2 & 0 \times 3 + 2 \times 7 + 1 \times 3 \\ (-2) \times 1 + (-4) \times 0 + (-1) \times 2 & (-2) \times 3 + (-4) \times 7 + (-1) \times 3 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 2 & 17 \\ -4 & -37 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

C har dimensjon 2×3 slik at C^T har dimensjon 3×2 og B og C^T har samme dimensjon. Dermed er

$$B - C^T = \begin{bmatrix} 1 - 1 & 3 - (-1) \\ 0 - (-2) & 7 - 1 \\ 2 - 1 & 3 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

B og $\vec{v}$ har dimensjoner hhv 3×2 og 3×1, dvs produktet $B\vec{v}$ er ikke definert.
$\vec{w}^T$ har dimensjon 1×2 slik at $\vec{w}^T C$ er definert og har dimensjon 1×3:

$$\vec{w}^T C = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 1 \times (-1) & 1 \times (-2) + 1 \times 1 & 1 \times 1 + 1 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Hvis mulig, regn ut inversmatrisen A^{-1}, hvor A er definert over.
LF:
Vi utfører radoperasjoner for å komme fram til redusert trappeform for den utvidede matrisen $[A \mid \mathbf{1}_3]$, hvor $\mathbf{1}_3$ er identitetsmatrisen av dimensjon 3:

$$
\begin{aligned}
[A \mid \mathbf{1}_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

dvs

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

c) Bestem alle løsninger til ligningssystemet

$$
C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{w}.
$$

C og $\vec{w}$ er definert ovenfor.
LF:

Vi utfører radoperasjoner på totalmatrisen til ligningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$$

Vi ser at x_3 er en fri variabel og at

$$x_1 = \underline{x_3 - 3}, \quad x_2 = \underline{x_3 - 2},$$

Oppgave 2
Funksjonen $f(x) = x^3 + x - 1$ har nøyaktig ett nullpunkt på intervallet $[0, 1]$ (du trenger ikke vise dette).

Bruk halveringsmetoden til å regne ut en tilnærmet verdi for nullpunktet slik at feilen i svaret er mindre enn $1/16$.
LF:
I halveringsmetoden starter vi med et intervall hvor vi vet at det er nøyaktig ett nullpunkt. Gjennom suksessive halveringer snevrer vi så inn de mulige verdiene for nullpunktet.

- Intervallet $[0, 1]$ deles inn i $[0, 1/2]$ og $[1/2, 1]$. Vi har da at $f(0) < 0$, $f(1/2) = 1/8 + 1/2 - 1 < 0$, mens $f(1) > 0$, dvs at nullpunktet må ligge i $[1/2, 1]$.
- Deler igjen i 2 intervaller $[1/2, 3/4]$ og $[3/4, 1]$. $f(3/4) = 27/64 + 3/4 - 1 = 11/64 > 0$ slik at nullpunktet må ligge i $[1/2, 3/4]$.
- Deler igjen i 2 intervaller $[1/2, 5/8]$ og $[5/8, 3/4]$. $f(5/8) \approx -0.13 < 0$ slik at nullpunktet må ligge i $[5/8, 3/4]$.
- Vi velger midtpunktet i dette intervallet $\underline{11/16}$ som den tilnærmede verdien siden avviket mellom denne verdien og det virkelige nullpunktet (dvs *feilen*) må være mindre enn halvparten av bredden til intervallet, dvs mindre enn $(3/4 - 5/8)/2 = (12/16 - 10/16)/2 = 1/16$.

Oppgave 3
Løs den komplekse likningen

$$\frac{z+1}{\sqrt{3}z} = i.$$

Skriv løsningen på kartesisk form og på polar form.
LF;
Vi løser ligningen:

$$\frac{z+1}{\sqrt{3}z} = i \Leftrightarrow z+1 = i\sqrt{3}z \Leftrightarrow (1-i\sqrt{3})z = -1.$$

Vi skriver ut hva z må være:

$$z = \frac{-1}{1-i\sqrt{3}} = \frac{-1}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(-1)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{1+3} = \frac{1}{4}(-1-i\sqrt{3}),$$

dvs på kartesisk form:

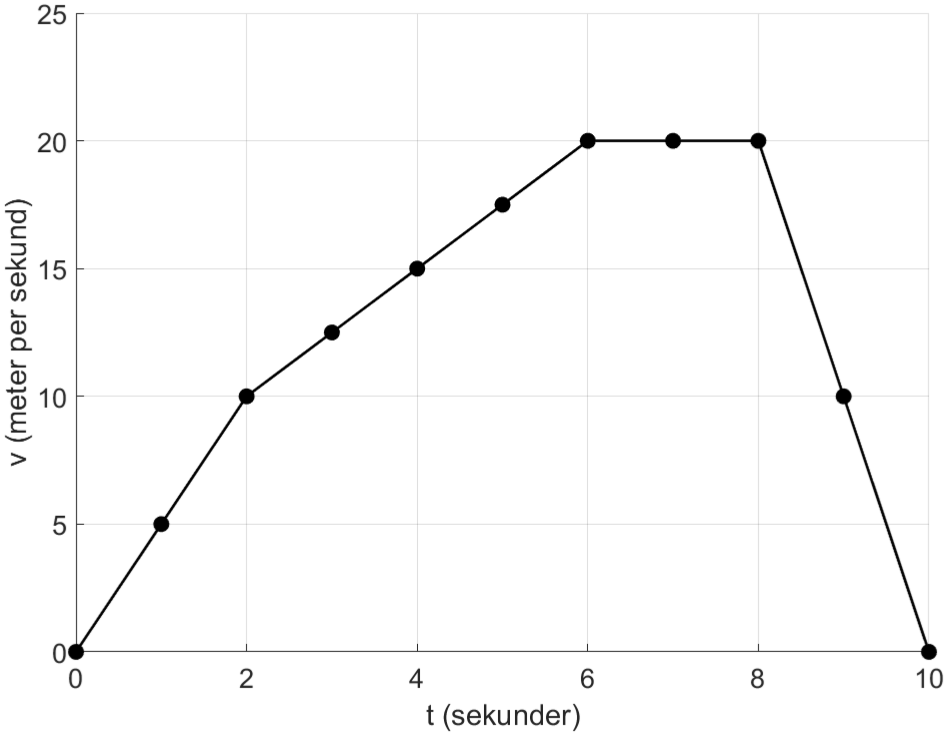
$$\underline{z = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

For polar form har vi at $r = \sqrt{1/16+3/16} = \sqrt{1/4} = 1/2$. Videre er $\tan\theta = \sqrt{3}$ slik at $\theta = \pi/3$ eller $\theta = \pi/3+\pi = 4\pi/3$. Ved inspeksjon ser vi at z ligger i tredje kvadrant slik at vi må ha $\theta = 4\pi/3$. På kompakt polar form er da

$$\underline{z = \frac{1}{2}e^{i4\pi/3}}.$$

Oppgave 4
En bil starter opp og kjører et stykke før den bremser og stanser igjen. Farten til bilen måles hvert sekund. Sammenhørende målinger av fart (v) og tid (t) er vist i figuren nedenfor.

Basert på disse målingene, bestem strekningen s som bilen har tilbakelagt.
LF:
Vi har at $v(t) = s'(t)$, dvs $s(t) = \int v(t)\,dt$. Den tilbakelagte strekningen er da $s = \int_0^{10} v(t)\,dt$, dvs arealet under grafen vist i figuren. Ved å lese av grafen og bruke reglene for areal av trapeser og/eller trekanter får vi at tilbakelagt strekning er <u>140 m</u>.



Oppgave 5

En ballong blåses opp slik at volumet øker med rate 300 cm^3/s. Vi antar at ballongen har form som ei kule med radius r og minner om at ei slik kule har volum $4\pi r^3/3$.

Hvor fort endres radien til ballongen når $r = 10$ cm?

LF:

Endring i volum og radius er eksempler på koblede hastigheter. I dette tilfellet kan vi relatere endring i volum dV/dt og endring i radius dr/dt ved å bruke kjerneregelen til å derivere V med hensyn på t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Herfra får vi

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dV/dt}{4\pi r^2},$$

hvor dV/dt er oppgitt til å være 300 cm^3/s. Da er endring av radius når $r = 10$ cm:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{300\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}}{4\pi(10\,\mathrm{cm})^2} = \underline{3/(4\pi)\,\mathrm{cm/s} \approx 0.2387\,\mathrm{cm/s}}.$$

Oppgave 6

a) Bestem løsningen til initialverdiproblemet

$$q'' + Rq' + 4q = 0, \quad q(0) = 1, \quad q'(0) = 0,$$

når $R = 0$.
LF:
Når $R = 0$ er den karakteristiske ligningen

$$r^2 + 4 = 0,$$

som har røtter $r = \pm 2i$. Da er generell løsning av differensialligningen

$$q(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t).$$

Initialkravet $q(0) = 1$ gir oss $A = 1$. Den deriverte er

$$q'(t) = -2\sin(2t) + 2B\cos(2t).$$

Initialkravet $q'(0) = 0$ gir $2B = 0$. Dermed er

$$q(t) = \underline{\cos(2t)}.$$

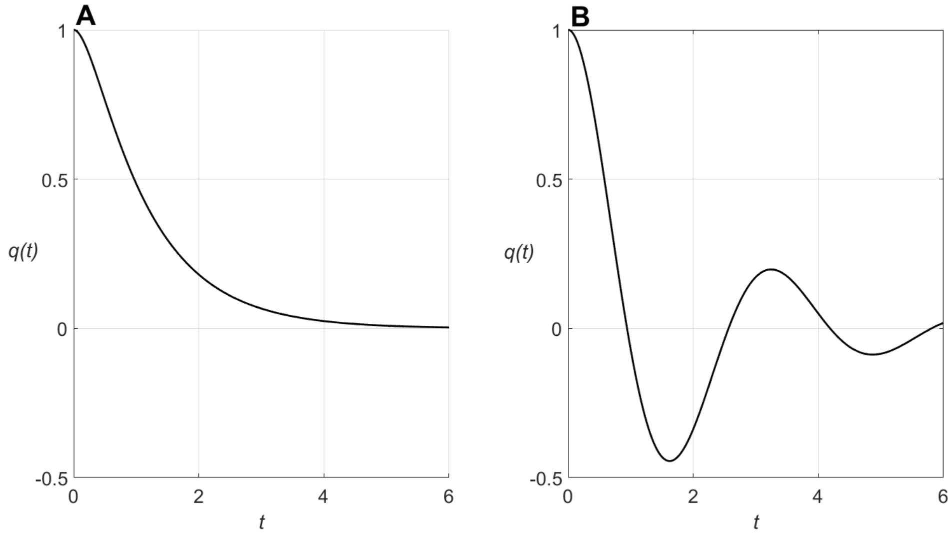
Differensialligningen i a) kan beskrive den tidsvarierende ladningen $q(t)$ i en såkalt RLC-krets uten strømkilde med en spole med *induktans* $L = 1$, kondensator med *kapasitans* $C = 1/4$ og motstand med *resistans* R.

Vi ser på to RLC-kretser. Motstanden i den ene kretsen har resistans $R = 1$, mens motstanden i den andre kretsen har resistans $R = 5$. Figurene under viser hvordan initialverdiproblemet i a) beskriver ladningen $q(t)$ i de to kretsene.

b) Hvilken av figurene beskriver ladningen $q(t)$ i kretsen med $R = 1$? Hvilken av dem beskriver $q(t)$ i kretsen med $R = 5$? Begrunn svaret.
LF:
Den karakteristiske ligningen er

$$r^2 + Rr + 4 = 0,$$

som har røtter $-R/2 \pm \sqrt{(R/2)^2 - 4}$. For $R = 1$ er $(R/2)^2 - 4 = 1/4 - 4 < 0$ slik at vi får to komplekse røtter. Dermed er systemet i dette tilfellet underdempet, dvs det vil fremvise svingninger som dempes, som i figur B. For $R = 5$ er $(R/2)^2 - 4 = 6.25 - 4 > 0$, dvs i dette tilfellet er røttene reelle, systemet er overdempet og fremviser dermed dempning av ladning uten svingninger, som i figur A. Oppsummert: $R = 1$: B. $R = 5$: A.



Oppgave 7
Regn ut det uegentlige integralet.

$$\int_0^\infty x^5 e^{-x^3}\,dx$$

LF:
Vi bruker først substitusjon med $y = x^3$ slik at $y' = 3x^2$. Da har vi for det tilhørende ubestemte integralet

$$\int x^5 e^{-y}\,\frac{dy}{3x^2} = \frac{1}{3}\int x^3 e^{-y}\,dy = \frac{1}{3}\int y e^{-y}\,dy,$$

hvor x^3 er blitt erstattet med y. Integralet $\int y e^{-y}\,dy$ kan løses ved delvis integrasjon med $u = y$ slik at $u' = 1$, $v' = e^{-y}$ slik at $v = -e^{-y}$:

$$\int y e^{-y}\,dy = -y e^{-y} + \int e^{-y}\,dy = -y e^{-y} - e^{-y} + C.$$

Dermed er

$$\int x^5 e^{-x^3}\,dx = \frac{1}{3}(-x^3 e^{-x^3} - e^{-x^3}) + C.$$

Videre er

$$\int_0^\infty x^5 e^{-x^3}\,dx = \frac{1}{3}\lim_{L\to\infty}[-x^3 e^{-x^3} - e^{-x^3}]_0^L = \frac{1}{3}\lim_{L\to\infty}[-L^3 e^{-L^3} - e^{-L^3} + e^0] = \underline{\frac{1}{3}}.$$

SLUTT