Integrasjonsoppgaver Forkurs

Det er hint til oppgavene på baksiden av arket. Dere kan sjekke svarene dere kommer frem til ved å derivere dem. Hvis dere har regnet riktig (og derivert riktig) skal den deriverte vere lik integranden (uttrykket dere integrerte).

(1)
$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

(2)
$$\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2-2x+5}}\,dx$$

(3)
$$\int (\sin x - \cos x)\exp(\sin x + \cos x)\,dx$$

(4)
$$\int \cos 2x \exp(\sin x + \cos x)\,dx$$

(5)
$$\int t\sqrt{t-1}\,dt$$

(6)
$$\int (t+2)\sqrt[4]{t-3}\,dt$$

(7)
$$\int \ln|2x^3 - 3x^2|\,dx$$

(8)
$$\int \exp(\sqrt[3]{x})\,dx$$

(9)
$$\int \cos(\ln|x|)\,dx$$

(10)
$$\int x\sin x\cos x\,dx$$

(11)
$$\int \sin(2x)\cos^3(x)\,dx$$

(12)

$$\int x^6 e^x \, dx$$

Hint til oppgavene

(1) Prøv med substitusjonen $u = \sqrt{x}$.
(2) Prøv med substitusjonen $u = x^2 - 2x + 5$.
(3) Prøv med substitusjonen $u = (\sin x + \cos x)$.
(4) Prøv med substitusjonen $u = (\sin x + \cos x)$ og merk at

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x).$$

Bruk deretter delvis integrasjon.
(5) Prøv med substitusjonen $u = t - 1$.
(6) Prøv med substitusjonen $u = t - 3$.
(7) Logaritme tar produkt til sum så $\ln|2x^3 - 3x^2| = 2\ln|x| + \ln|2x - 3|$. Disse uttrykkene kan integreres ved å bruke delvis integrasjon. (Det kan vere lurt å la $u'(x) = 1$.)
(8) Prøv med substitusjonen $u = \sqrt[3]{x}$. Deretter kan delvis integrasjon benyttes (to ganger?) til å løse det ubestemte integralet.
(9) Prøv med substitusjonen $u = \ln|x|$. Ver nøye med fortegn her.
(10) Merk at $2\sin x \cos x = \sin 2x$. Prøv deretter med delvis integrasjon.
(11) Merk at $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, og $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Prøv deretter med substitusjonen $u = \cos x$.
(12)

$$\int x^6 e^x \, dx = (x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720)e^x + C$$

Generelt så er

$$\int x^n e^x \, dx = [x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} +$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - + \cdots + (-1)^n n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 1]e^x + C$$

Dette kan en se ved å bruke delvis integrasjon gjentatte ganger. Alternativt, så observerer vi at

$$(p(x)e^x)' = (p(x) + p'(x))e^x.$$

Vi trenger derfor bestemme et polynom $p(x)$ slik at $p(x) + p'(x) = x^n$. Vi ser da at koeffisienten til x^n er 1, og koeffisienten til x^k er minus $(k+1)$ ganger koeffisienten til x^{k+1} for alle $k < n$. Polynomet har grad n.