13. aug. 2015 Matte 1000 Halvard Fausk

Rom: PS 229

①

Kurset har en nettside (bruker ikkje fronter). Søk fausk hioa.

Matlab benyttes i kurset. Sølve Selstøl holder et 8 ukers kurs (til 21. oktober).

Ha matlab ferdig instalert til onsdag!

Be Sølve om hjelp hvis dere har problemer med installasjonen.

Øvingstimer: August Johannson, Leiv Øyehaug

Linje og klasse tilhørighet er ikkje absolutt.

Obligatoriske innleveringer (obliger)

Regner med å ha 6 innleveringer, hvorav 4 må godkjennes. Fokuser på å lære når dere gjør obligene.

Eksamen: 5 timer,

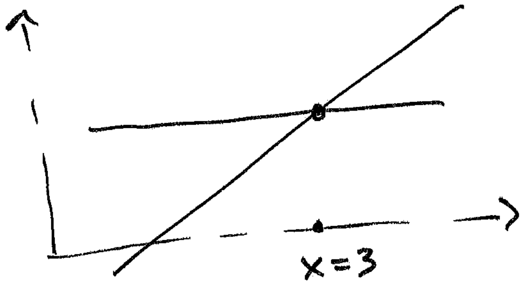
Ta med godkjent kalkulator. Formelark blir vedlagt.

Repetisjonsforelesning ved Jan Kleppe.

(2)

Komplekse tall

Lineær likning



$$4x - 7 = 5 \quad \text{(påstand)}$$

$$4x \underbrace{-7 + 7}_{0} = 5 + 7$$

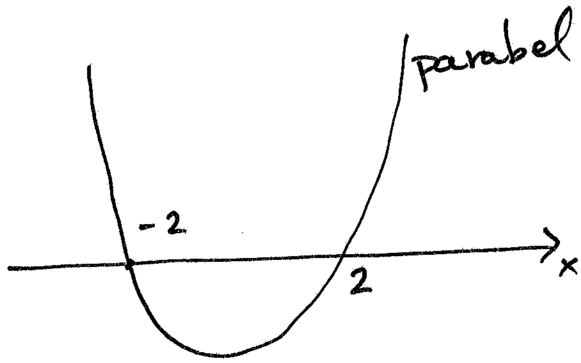
$$4x = 12$$

$$\frac{1}{4} \cdot 4x = \frac{1}{4} \cdot 12$$

Løsningen er $\underline{x = 3}$

(verdier for variabelen som gjør påstanden sann.)

Kvadratiske likninger



1)

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

Løsningene er $x = \sqrt{4} = \underline{2}$

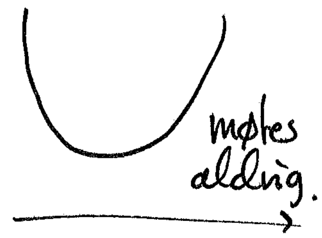
og $x = -\sqrt{4} = \underline{-2}$

Faktorisering av $2x^2 - 8$

$$2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = \underline{2(x+2)(x-2)}$$

(konjugatsetningen)

③ $x^2+1=0$



Ingen løsning blant de reelle tallene

x^2+1 er irredusibel over de reelle tall.

Utvider de reelle tall $\mathbb{R}$ slik at $x^2+1=0$ har røtter (x^2+1 kan faktoriseres som et produkt av lineære polynomer).

$$i^2+1=0$$

$$i^2=-1$$

$$(-i)^2=(-1\cdot i)^2=(-1)^2\cdot(i)^2=1\cdot(-1)=-1$$

i og $-i$ er løsningene til $x^2+1=0$

$$x^2+1=(x+i)(x-i)$$

$$\Big(x\cdot x+\underbrace{x(-i)+i\cdot x}_{0}+(i)(-i)$$
$$x^2+0-i^2=x^2+1\Big)$$

---

j brukes av og til i stede for i. (elektro)

Av og til benyttes $\sqrt{-1}$ for i

($-i$ er og en kandidat til $\sqrt{-1}$)

Komplekse tall $\mathbb{C}$

(4)

$$z = \underset{\text{realdel}}{a} + \underset{\text{imaginærdelen}}{b}i \qquad a, b \text{ reelle tall}$$

$$\mathrm{Re}(z) = a \qquad \mathrm{Im}(z) = b \quad (\text{ikkje } ib)$$

Addisjon og multiplikasjon av komplekse tall som for polynomer med variabel i hvor $i^2 = -1$.

$$(1+i) + (3-2i) = 1+3 + (1-2)i$$
$$= 4 - 1\cdot i = \underline{4 - i}.$$

$$(1+i)(3-2i) = 1\cdot 3 + 1\cdot(-2i) + i\cdot 3 + i(-2i)$$
$$= 3 - 2i + 3i - 2\underbrace{i^2}_{-1}$$
$$= 3 + 1\cdot i - 2(-1)$$
$$= \underline{5 + i}.$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1\cdot i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1.$$
$$i^{25} = i^{6\cdot 4 + 1} = (i^4)^6 \cdot i^1 = 1^6 \cdot i = \underline{i}$$

$$(2+i) - 5i = 2 + i + (-5)\cdot i$$
$$= \underline{2 - 4i}$$

Det reelle tallet a identiseres med $a + 0\cdot i$ i $\mathbb{C}$.

Kompleks konjugasjon skifter ut i med $-i$.

5

$z = a + bi$

Den kompleks konjugerte til z er $\bar{z} = a - bi$

$\overline{2+3i} = 2 - 3i$ $\quad\quad \bar{7} = 7$

$\bar{i} = -i$ $\quad\quad z = \bar{z}$ hvis og bare hvis z er et reelt tall.

Noen egenskaper: $\quad \bar{\bar{z}} = \overline{(\bar{z})} = z$

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ $\quad\quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(siden $(-i)^2 = i^2 = -1$)

$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$i\,\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi)$$

$$= a^2 - (bi)^2 = a^2 - i^2 b^2$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \geq 0 \quad \text{(reelt tall)}$$

$$z \cdot \bar{z} > 0 \quad \text{når} \quad z \neq 0$$

$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ kalles absoluttverdien til z.

Alle komplekse tall z ulik 0 har en multiplikativ invers (dvs. det finnes en w slik at $z \cdot w = 1$)

$z \cdot \bar{z} = |z|^2 > 0$ når $z \neq 0$, gir

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

Inverselementet til z $(\neq 0)$

⑥ er $\quad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Eksempler: $\quad (3-i)^{-1} = \frac{3+i}{3^2+(-1)^2} = \frac{3+i}{10}$

$$\left(\frac{1}{(3-i)} \frac{(3+i)}{(3+i)} = \frac{3+i}{3^2 - i^2} = \frac{3+i}{10} \right)$$

$$\frac{-1+i}{3-i} = (-1+i) \cdot \frac{1}{3-i} = (-1+i) \frac{(3+i)}{10}$$

$$= \frac{-3-i+3i+i^2}{10} = \frac{-4+2i}{10} = \underline{\underline{\frac{-2+i}{5}}}$$

Lineær likning

$$(3-i)z + 1 = i$$

$$(3-i)z = -1+i$$

$$z = \frac{1}{3-i} \cdot (3-i)z = \frac{1}{3-i}(-1+i)$$

Løsningen er $\quad z = \underline{\frac{-2+i}{5}}$

oppgave: Løs likningen

$$3z - i = 2i - 5 - iz.$$

7

Fundamentalteoremet i algebra

Alle polynomer med komplekse koeffisienter kan faktoriseres (over $\mathbb{C}$) som et produkt av lineære polynomer.

Vi viser dette for polynomer av grad 2 (med reelle koefisienter)

$$x^2 + 7 = (x + \sqrt{7}i)(x - \sqrt{7}i)$$

$$x^2 + a = (x + \sqrt{a}i)(x - \sqrt{a}i) \qquad a \geq 0$$

$$x^2 - a = (x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) \qquad a > 0$$

$$x^2 - 4x + 7 = \underbrace{(x-2)^2 - 4}_{x^2 - 4x} + 7$$

$$(x-2)^2 + 3 = (x - 2 + \sqrt{3}i)(x - 2 - \sqrt{3}i)$$

Fullføring av kvadratet

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

Anta $a \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}\right)$$

Faktoriseres som et produkt av lineære ledd for alle $a (\neq 0)$, b og c.

(8) Vi kan også utlede abc-formelen (annengradsformelen)

$ax^2+bx+c = 0$ er ekvivalent til

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right) = 0$$

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$$

(legg merke til at $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & a>0 \\ -a & a<0 \end{cases}$
a reelt tall)

Dette gir $x = \dfrac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

For komplekse tall gir dette også mening når $\sqrt{b^2-4ac}$ er et komplekst tall slik at kvadratet er lik b^2-4ac (slike kvadratrøtter er bestemt opp til fortegn, så formelen avhenger ikke av valget vi gjør.)