17. august 2015

(Fra sist: Fundamentalteoremet i algebra)

(1) $x^2 + 6ix - 10$ eksempel på faktorisering

$= \underbrace{(x+3i)^2}_{x^2+6i+(3i)^2} - (3i)^2 - 10 = (x+3i)^2 + 9 - 10$

$= (x+3i)^2 - 1$

$= \underline{(x+3i+1)(x+3i-1)}$

En konsekvens av fundamentalteoremet i algebra og unik faktorisering:

> Alle reelle polynomer (koeffisientene er reelle tall) faktoriseres som et produkt av lineære og kvadratiske polynomer.

irredusible over $\mathbb{R}$

Eksempel $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

oppgave: $x^4 + 1$ (≥ 1 for alle x)

ingen lineære faktorer

er et produkt av 2 kvadratiske faktorer

Faktoriser x^4+1.

---

skisse av bevis $p(x) = a(x-r_1)\cdots(x-r_n)$

$p(x)$ reelt polynom og x reell variabel. Da er

$\overline{p(x)} = p(x)$ så $\bar{a}(x-\bar{r}_1)(x-\bar{r}_2)\cdots(x-\bar{r}_n)$

$= a(x-r_1)\cdots(x-r_n)$

hvis $(x-r)$ er en faktor i $p(x)$

(2) og r ikke er lineær, forekomme den i et par med $(x-\bar{r})$.

Produktet $(x-r)(x-\bar{r})$

$$= x^2 - (\underbrace{r+\bar{r}})x + (r \cdot \bar{r})$$

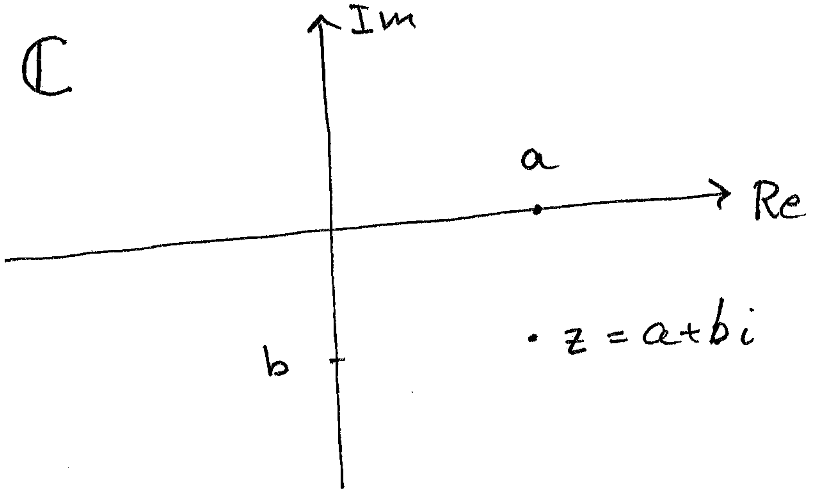
$$= x^2 - (2\mathrm{Re}(r))x + |r|^2$$

er et reelt polynom.

Det komplekse plan $\qquad z = a+bi$

Kartesisk form

$\mathbb{C}$



$i^2 = -1$

$a, b \in \mathbb{R}$

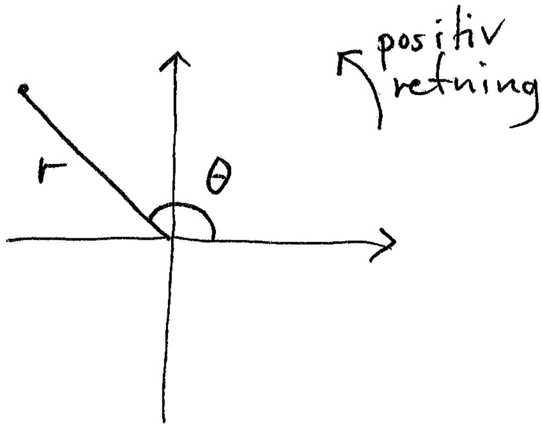
Komplekse tall $\leftrightarrow$ Punkt i planet $\leftrightarrow$ vektorer

(Et punkt svarer til vektoren som starter i origo og ender i punktet)

Addisjon i $\mathbb{C}$ svarer til vektor addisjon.

Polare koordinater

(3)



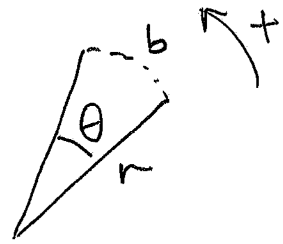
$r \geq 0$ lengde

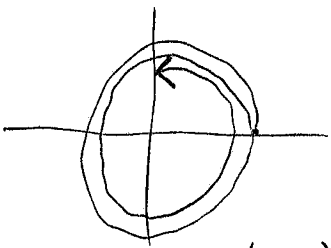
θ vinkel.

Vinkel i radianer

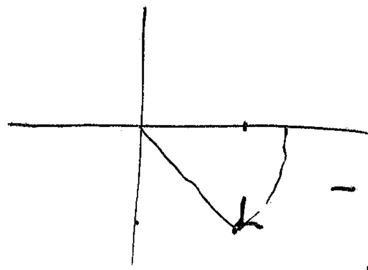
$\theta = \frac{b}{r}$

$2\pi \text{ rad} = 360°$





vinkelen er $(2\pi)\cdot 2 + \frac{\pi}{2} = \underline{\frac{9\pi}{2}}$.



$\underline{-\frac{\pi}{4}}$

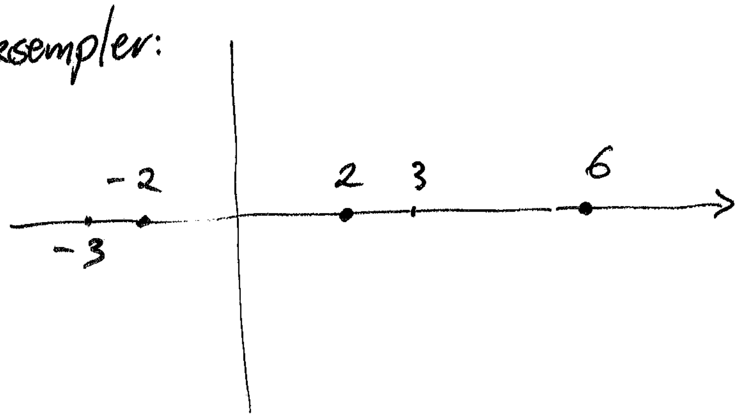
$r = 0$ alle θ : origo

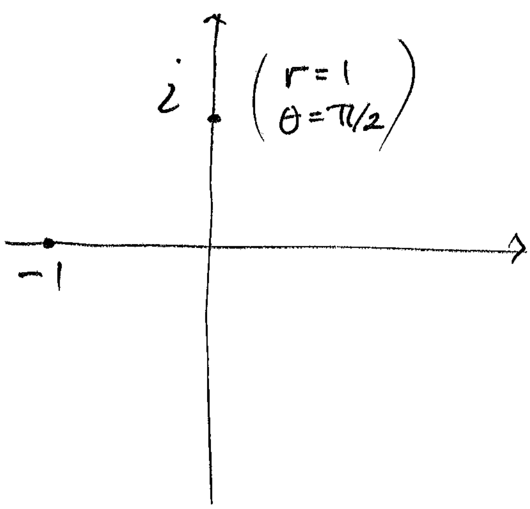
$r > 0$ $\quad r, \theta$ og $r, \theta + 2\pi \cdot n$ beskrive samme punkt.
n heltall

Multiplikasjon av komplekse tall (med polare koordinater):

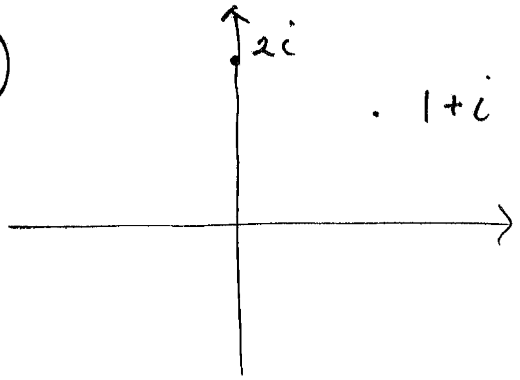
- ganger sammen lengdene
- legger sammen vinklene.

Eksempler:





4



$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} = \sqrt{(1+i)(1-i)}$

vinkel $\theta = \frac{\pi}{4}$

Produktet $(1+i)^2$ har lengde $\sqrt{2}^2 = 2$

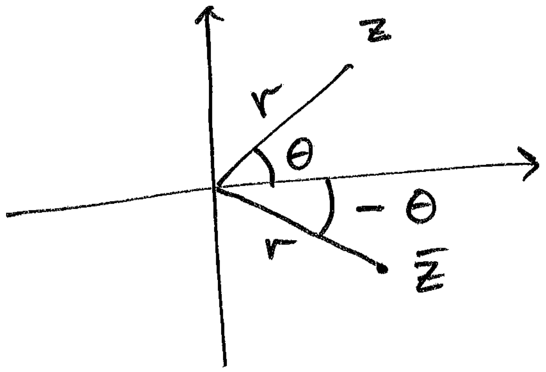
vinkel $\frac{\pi}{4} \cdot 2 = \frac{\pi}{2}$.

(sjekker dette med kartesisk koordinater:

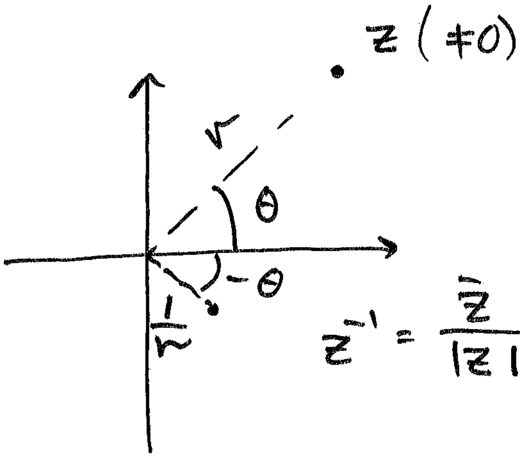
$(1+i)^2 = 1^2 + \underbrace{i^2}_{-1} + 2 \cdot 1 \cdot i = 2i$)

Kompleks konjugasjon : Reflekterer om x-aksen

vinkelen snur fortegn

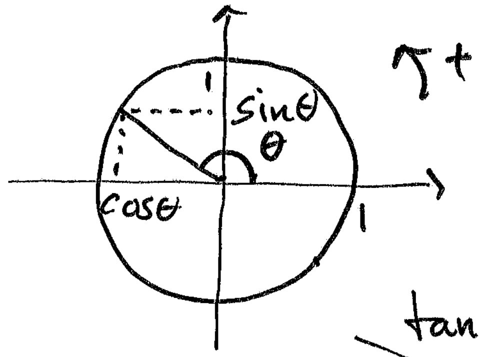


Inverselementer



$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

(5) Sinus og kosinus



$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ når $\cos\theta \neq 0$

$\sin\theta, \cos\theta$ periodiske funksjoner med periode 2π

$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \quad , \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$

Pytagoras $\quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad \left(\sin^2\theta = (\sin\theta)^2\right)$

polære koordinater $\qquad$ kartesiske koordinater

$r, \theta \longmapsto x = r\cos\theta \; , \; y = r\sin\theta .$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} \longleftarrow\!\shortmid \; x, y$

$r = 0$ ingen begrensning på θ.

$x = 0 \begin{cases} y > 0 & : \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{(opp til hele omløp)} \\ y < 0 & : \theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{— '' —} \end{cases}$

$x > 0 \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad$ — '' —

$x < 0 \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \quad$ — '' —

(arctan $= \tan^{-1}$
inversfunksjonen til tan)

Eksempel:
Beskriv $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ på polar form.

$r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \underline{2}$

$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \underline{\frac{\pi}{3}} = \underline{60^\circ}$

Vi viser nå resultatet om multiplikasjon av komplekse tall på polar form (fra addisjonsformlene)

6

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

(benyttet $i^2 = -1$)

$$= r_1 \cdot r_2 \big((\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2)$$
$$+ i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2)\big)$$

$$= \underline{r_1 \cdot r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))}$$

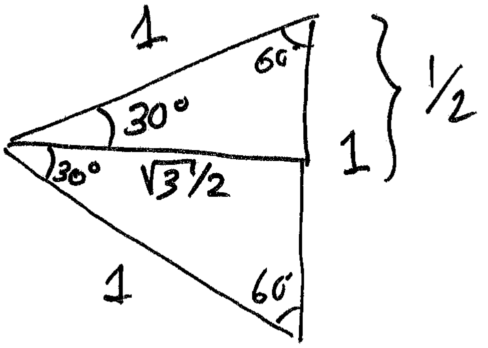
Et komplekst tall på polar form med lengde r og vinkel θ skrives som $\underline{r e^{i\theta}}$

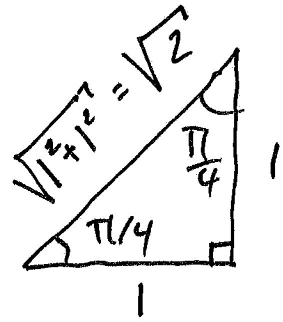
Eulers formel: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

(7) Eksakte verdier for cos og sin

θ	$0 = 0°$	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

Likesidet trekant





$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

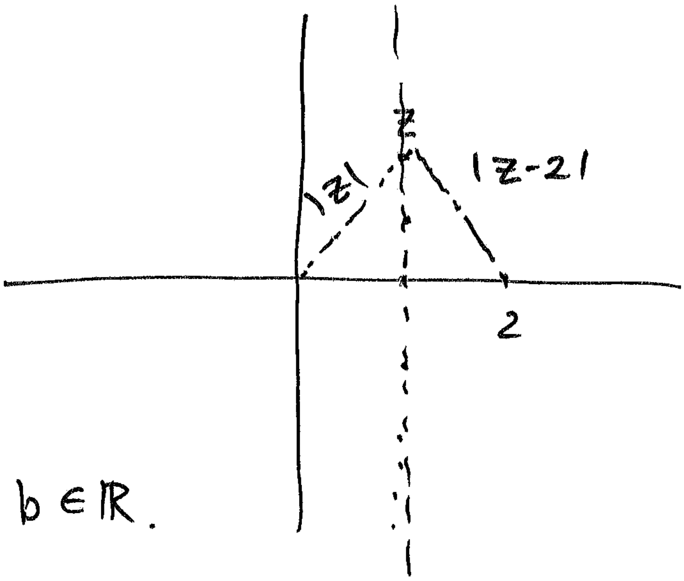
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Utvider vi med $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

får vi $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Løs likningene:

(8) $|z| = |z-2|$



Alle z slik at

$\operatorname{Re} z = 1$.

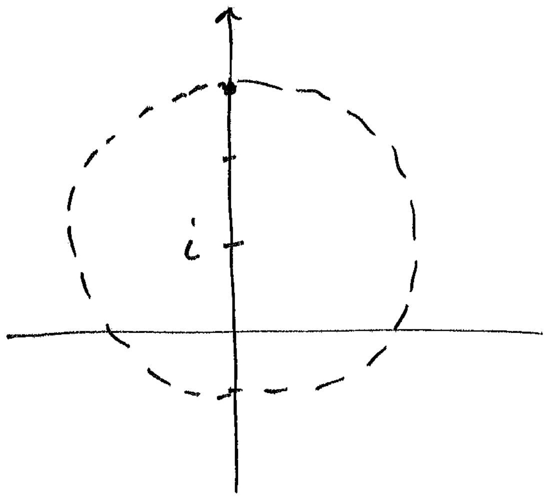
$z = 1 + ib$ for alle $b \in \mathbb{R}$.

$(z-i)(\bar{z}+i) = 4$

$(z-i)\cdot(\bar{z}+\overline{(-i)}) = (z-i)(\overline{z-i}) = 4$

$|z-i|^2 = 4$

$|z-i| = 2$



Løsningsmengden består av alle z på en sirkel med radius 2 og senter i $i = 0+i$

$z(\bar{z}-2) = 3$

$z\cdot\bar{z} - 2z = 3$

$|z|^2 - 2z = 3$

$2z = |z|^2 - 3$ reelt tall.

z må være reell. La oss anta det. Da er $\bar{z} = z$

$z^2 - 2z - 3 = 0$

$(z-1)^2 - 1 - 3 = 0$

$(z-1)^2 = 4$

$z - 1 = \pm 2$

$z = 1 \pm 2$

Løsningene er: $\underline{\underline{z = -1}}$ og $\underline{\underline{z = 3}}$