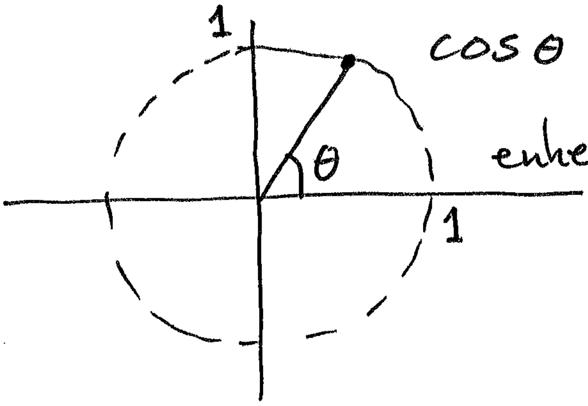
20. august
2015

(1)



$\cos\theta + i\sin\theta$

enhetssirkel

(fra sist gang:)

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

Gjentatt multiplikasjon av $(\cos\theta + i\sin\theta)$ med seg selv gir:

$$\boxed{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n}$$

De Moivres formel.

$n = 2$ dobling av vinkel $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin\theta$
$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$.

$n = 3$ $\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$

$$= (\cos\theta)^3 + 3\cos\theta\,(i\sin\theta)^2 + 3(\cos\theta)^2(i\sin\theta) + (i\sin\theta)^3$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\cdot\sin^2\theta + i\cdot 3\cos^2\theta\sin\theta - i\sin^3\theta$$

Realdelene må være like:

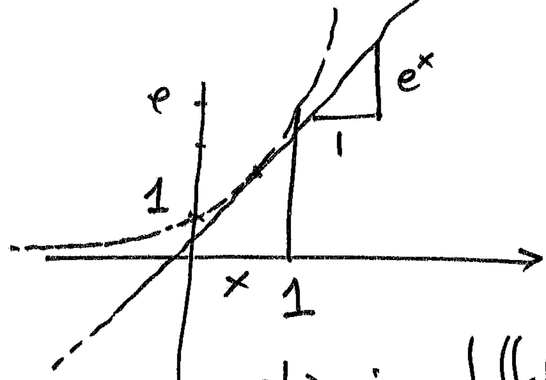
$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\cdot\sin^2\theta$$

Imaginærdelene må være like:

$$\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

② **Eksponentfunksjonen**

$e^x = \exp(x)$ grafen:



stigningstallet til tangenten i (x, e^x) er e^x

$e^0 = 1$

$e = 2.71828\ldots$ Euler tallet

* e^x tar sum til produkt

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

* $\frac{d}{dx} e^x = (e^x)' = e^x$

$$2^x = e^{\ln 2 \cdot x} \sim e^{0.693x}$$

$$\frac{d}{dx} 2^x = \ln 2 \cdot 2^x \sim 0.693 \cdot 2^x$$

Vi utvider e^z til alle komplekse tall, slik at vi bevarer egenskapene ovenfor.

$$e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$$

$$\frac{d}{dx} e^{x \cdot i} = i e^{x \cdot i}$$

---

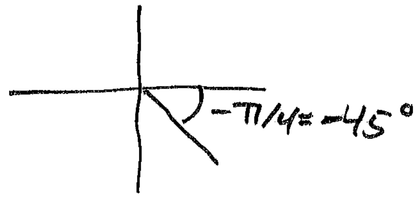
* $(\cos x + i \sin x)$ tar sum til produkt

* $\frac{d}{dx}(\cos x + i \sin x) = -\sin x + i \cos x$
$= i(\cos x + i \sin x)$

* $\cos x + i \sin x \,\big|_{x=0} = 1.$

Eulers formel $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta}$

(3) $$e^{1-\pi i/4} = e^{1} e^{-\frac{\pi}{4} i}$$



$$= \underline{e\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$e^{a+ib} = \underbrace{e^{a}}_{\text{lengden}} \cdot e^{ib}$$

vinkelen

Det komplekse tallet med lengde r og vinkel θ er lik $e^{\ln r + i\theta}$

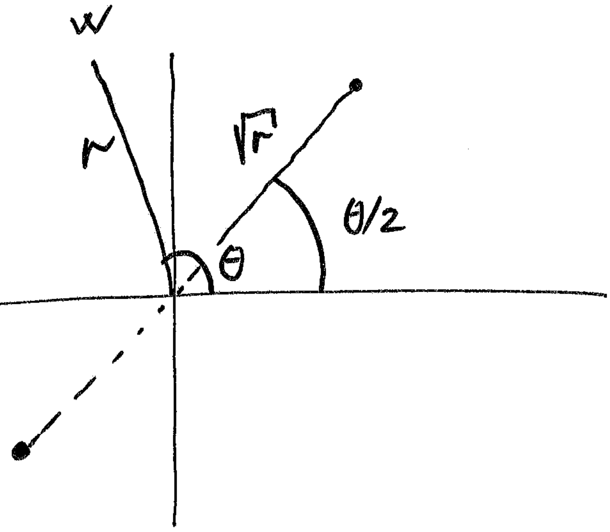
$$e^{2\pi i} = e^{0} = 1$$

Log (inversfunksjonen) til exp er ikkje velldefinert (utenvidere)

④

Kvadratrøtter

Kvadratrøttene til w er alle z slik at $z^2 = w$.



$$w = r e^{i\theta}$$

andre presentasjoner:

$r e^{i(\theta + 2\pi \cdot n)}$ n heltall

En kvadratrot til w

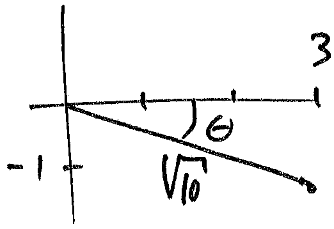
er $\underline{\sqrt{r}\, e^{i\theta/2}}$

en annen kvadratrot er $\sqrt{r}\, e^{i\theta/2 + \pi i}$

$\left(e^{i(\theta + 2\pi \cdot n)/2} = e^{i\theta/2 + \pi i \cdot n} \right)$ $= \underline{-\sqrt{r}\, e^{i\theta/2}}$.

Eksempel $\sqrt{3 - i}$ (1f))

$$3 - i = \sqrt{3^2 + 1^2}\, e^{i\theta}$$



$$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{3}\right) = 0.32175\ldots \text{ rad}$$

$\left(\sim \frac{1}{3} \text{rad} \sim 20° \quad 18.5° \right)$

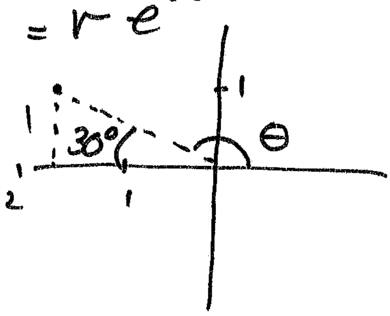
En rot av $z^2 = 3 - i$ er derfor

$$\underline{\sqrt[4]{10}\, e^{i \cdot 0.1608\ldots}}.$$

(lengden er $\sqrt{\sqrt{10}} = \left(10^{1/2}\right)^{1/2} = 10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10}$

vinkelen er $\dfrac{0.32175\ldots}{2} = 0.1608\ldots$)

(5) Eksempel: $z^2 = -\sqrt{3} + i = re^{i\theta}$



$$r = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{4} = \underline{2}$$

$$= \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

En rot er $z = \sqrt{2}\, e^{i\theta/2}$
$$= \sqrt{2}\, e^{5\pi/12} \qquad \left(\frac{5\pi}{12} = 75°\right)$$

Røttene er: $\underline{\sqrt{2}e^{5\pi/12} \quad \text{og} \quad -\sqrt{2}e^{5\pi/2}}$

$\sqrt{z}$ er bare velldefinert når z er på polarform.
Vi kan <u>velge</u> en entydig måte å skrive komplekse tall på polar form.

Eksempel

1) $z = re^{i\theta}$ $\quad 0 \le \theta < 2\pi$: Da er $-i = e^{\frac{3\pi}{2}}$, $\sqrt{-i} = e^{3\pi/4}$

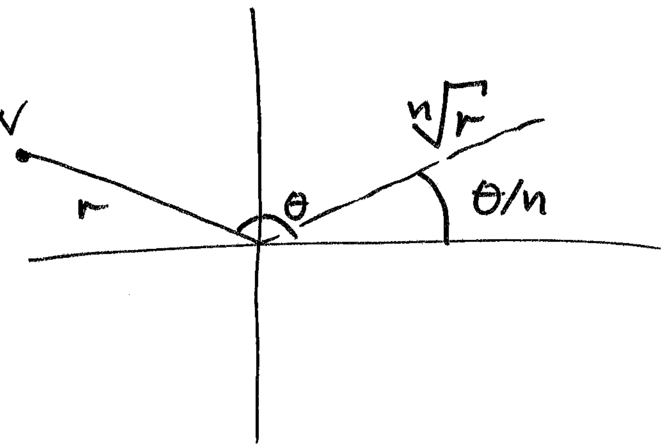
2) $z = re^{i\theta}$ $\quad -\pi < \theta \le \pi$: Da er $-i = e^{-\frac{\pi}{2}}$, $\sqrt{-i} = e^{-\pi/4}$

⑥ n-te røtter til w er løsninger til likningen $z^n = w$ n naturlig tall

$$w = r e^{i\theta}$$

alternativt: $r e^{i(\theta + 2\pi \cdot m)}$

$m \in \mathbb{Z}$ heltallene



En n-te rot er $\underline{\sqrt[n]{r}\, e^{i\theta/n}}$

$$\left(\left(\sqrt[n]{r}\, e^{i\theta/n}\right)^n = \left(\sqrt[n]{r}\right)^n \cdot \left(e^{i\theta/n}\right)^n = r \cdot e^{i\theta} \right)$$

andre n-te røtter: $\sqrt[n]{r}\, e^{i\theta/n} \cdot e^{(2\pi m/n)i}$.

$m = 1, 2, \dots, n-1$

Alle n-te røttene til w er: $\sqrt[n]{r}\, e^{i\theta/n} \cdot e^{\frac{2\pi m}{n} i}$

$m = 0, \dots, n-1$.

$w \neq 0$ har n forskjellige n-te røtter.

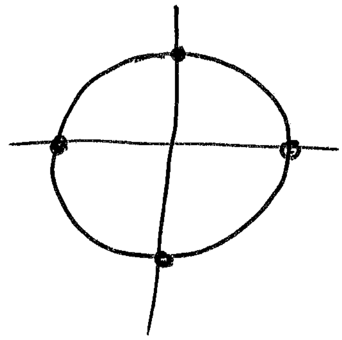
$e^{\frac{2\pi m}{n} i}$ $m = 0, 1, \dots, n-1$ er n-te røttene til enhetselementet 1. (uavhengig av w)

⑦ $z^4 = 1 = 1 \cdot e^{0i}$

En rot er $z = 1$.

$e^{\frac{2\pi i \cdot m}{4}} = e^{\frac{\pi}{2} i m}$

$m = 0, 1, 2, 3$



Røttene er $\{1, i, -1, -i\}$.

$z^4 - 1 = 0$

$z^4 - 1 = (z-1)(z-i)(z+1)(z+i)$

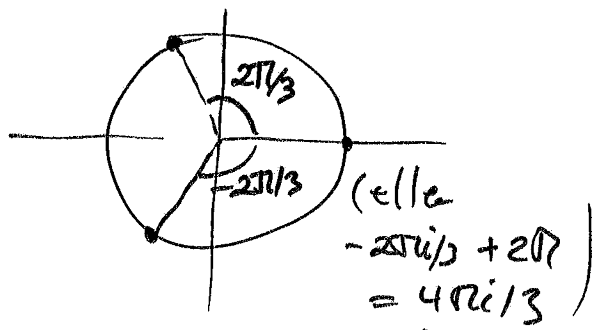
$z^3 = 27 e^i$

$r = 27$ $\sqrt[3]{r} = 3$

$\theta = 1$ $\theta/3 = 1/3$

En rot er $\underline{3 \cdot e^{i/3}}$

3-røttene til 1 :



Røttene til $z^3 = 27e^i$

er $\underline{\{ 3e^{i/3}, \ 3e^{i/3 + 2\pi i/3}, \ 3e^{i/3 + 4\pi i/3} \}}$

$z^3 - 27e^i = (z - 3e^{i/3})(z - 3e^{i/3 + 2\pi i/3})(z - 3e^{i/3 + 4\pi i/3})$

Generelt faktoriseres $z^n - w$ som :

$z^n - w = (z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n)$

hvor $r_1, \ldots, r_n$ er røttene til $z^n = w$.

(8)

Følgende faktorisering er ikkje lett å komme frem til bare ved bruk av reelle tall:

180° 60°

$$x^9 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)\cdot$$

100° 200

$$(x^2 + 2\sin(10^\circ)x + 1)(x^2 - 2\cos(20^\circ)x + 1)\cdot$$

140°

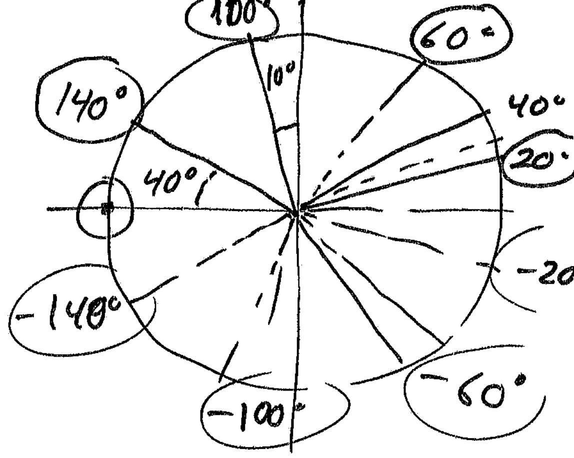
$$(x^2 + 2\cos(40^\circ)x + 1)$$

Ved bruk av komplekse tall blir det lett →

Røttene til $x^9 + 1 = 0$:

(9) $x^9 = -1 = e^{+\pi i + 2\pi i \cdot n}$

$$x = e^{\frac{\pi}{9} i + \frac{2}{9}\pi i \cdot n}$$



$\frac{\pi}{9} = \frac{180°}{9} = 20°$ $\qquad$ $\frac{2\pi}{9} = 40°$. $\qquad$ 9 røtter.

$$(x - e^{i\theta})(x - \overline{e^{i\theta}})$$

$$= x^2 - x(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta}$$

$$= \underline{x^2 - 2\cos\theta \cdot x + 1}$$

Vi benytter at $\cos(60°) = \frac{1}{2}$

$\cos(140°) = -\cos(40°)$, $\quad \cos(100°) = -\sin(10°)$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\mathrm{Re}\, e^{i\theta} = 2\cos\theta .$$