24.08.2015

Linear algebra

(1)

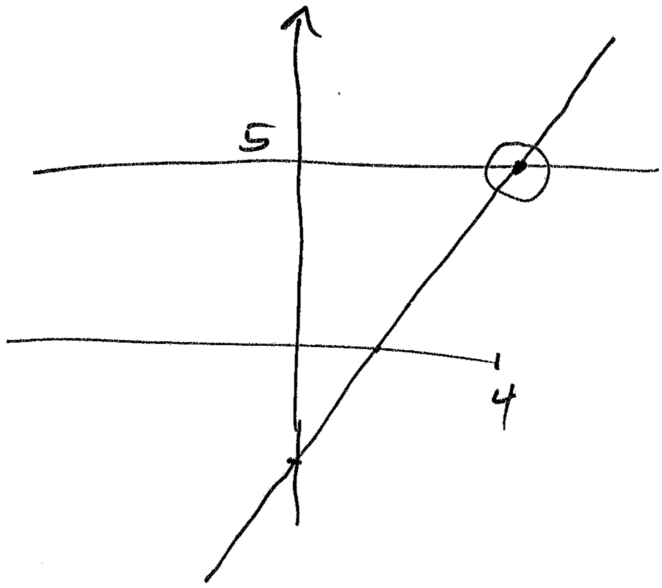
Eks

Én lineær likning

$$2x - 3 = 5$$

Løsningen er $x = 4$

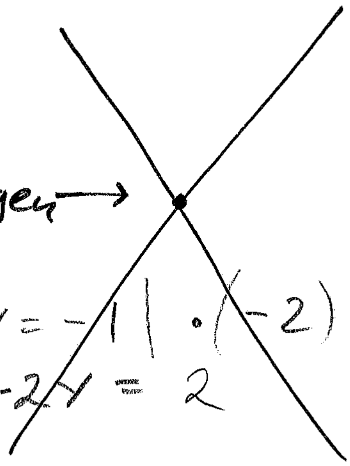
($y = 2x - 3$ funksjon av x)



Lineære likningssystemer

Flere lineære likninger.

2 variabler
2 likninger



Eks
$$2x - y = 3$$
$$x + y = -1$$

$\left(\begin{array}{l} x + y = -1 \mid \cdot(-2) \\ -2x - 2y = 2 \end{array} \right)$

Løser likningen:

bytter likningene:

$$\begin{aligned} x + y &= -1 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned} \quad \Big]\, -2$$

"tilde" $\sim$

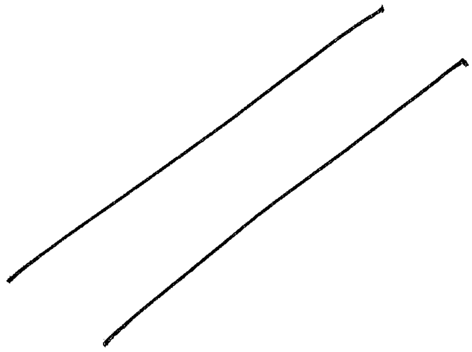
$$\begin{aligned} x + y &= -1 \\ 0 - 3y &= 5 \quad \cdot\left(\tfrac{-1}{3}\right) \end{aligned} \quad \sim \quad \begin{aligned} x + y &= -1 \\ 0 + y &= -5/3 \end{aligned} \quad \Big]\, (-1)$$

$$\sim \quad \begin{aligned} x + 0 &= -1 + 5/3 = 2/3 \\ y &= -5/3 \end{aligned}$$

Løsningen er $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{-5}{3}$

Eksempel ②

$$x - y = -1$$
$$x - y = 2$$

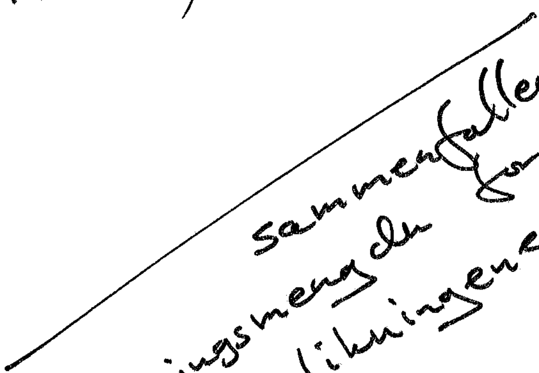


(−1 · likning 1 til likning 2 gir $0 = 3$. aldri sant)

Ingen løsning.

(Løsningen er tom)

$$x - y = 2$$
$$-2x + 2y = -4$$



sammenfallende løsningsmengder for begge likningene.

Vendelig mange løsninger.

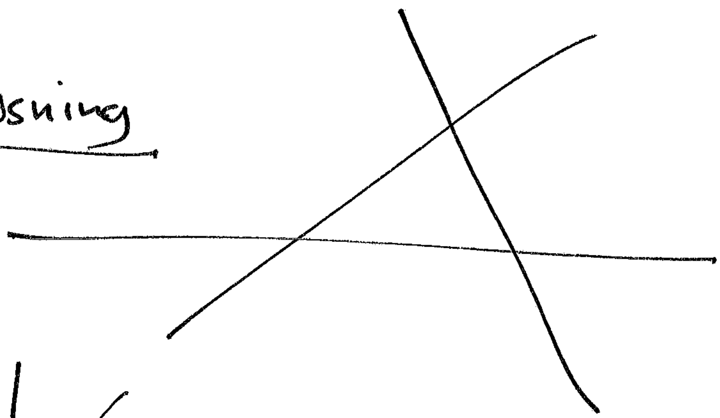
Løsningene er linjen: $\underline{y = x - 2}$

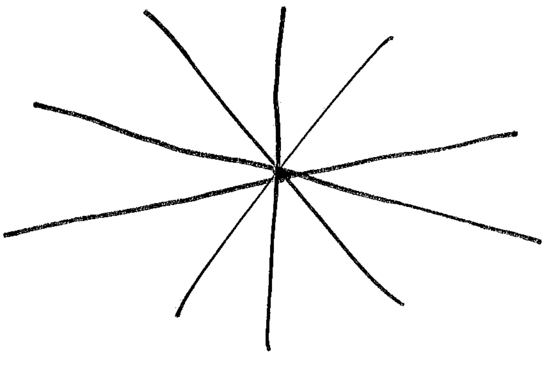
(Likning 2 er lik $-2 \cdot$ likning 1.)

---

2 variabler og mer enn to likninger

Typisk <u>ingen løsning</u>
(Generisk)





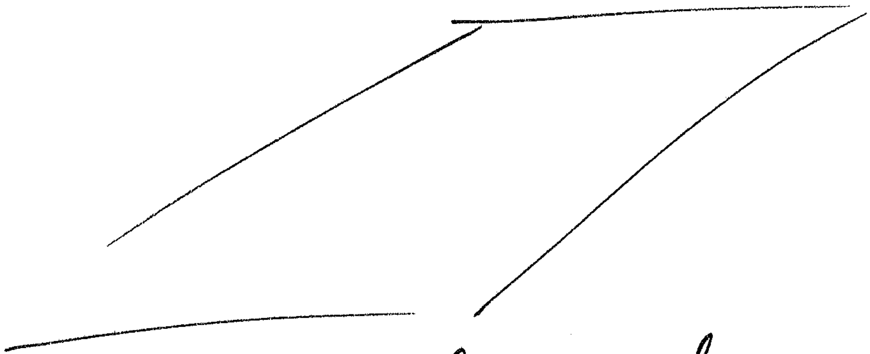
fem likninger

én løsning!
(utypisk)

Lineære likninger med 3 variabler

Én likning
$$x + y + z = 5$$

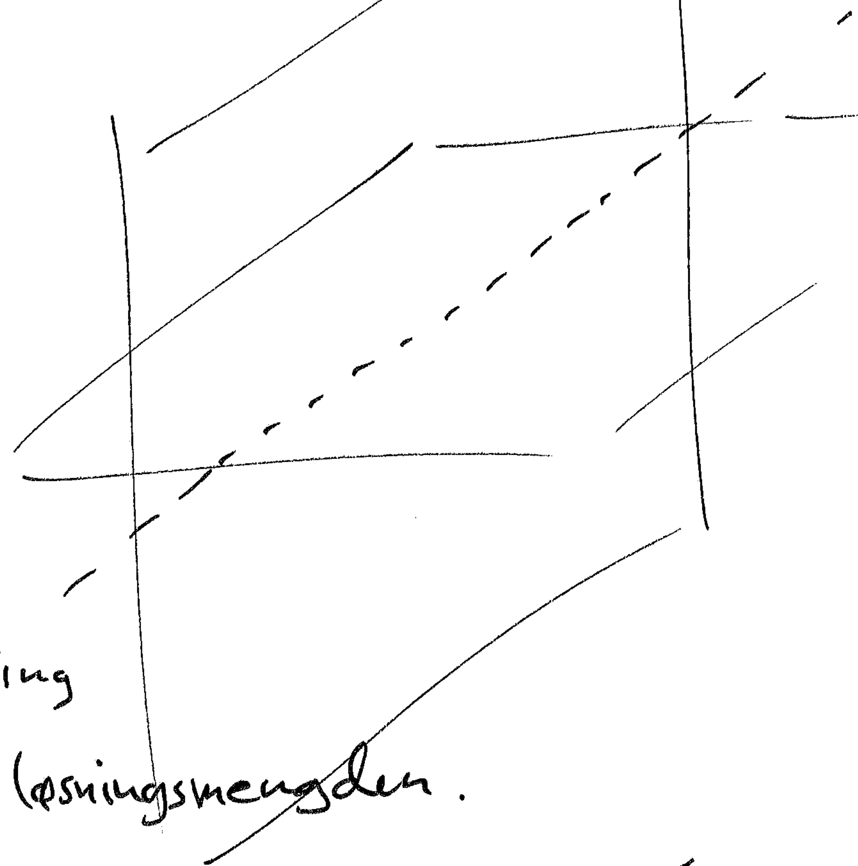
3



Løsningsmengden er et uendelig plan

2 likninger

Løsningsmengden er typisk en linje.



Hvis planene er parallelle og

1) forskjellige : ingen løsning

2) sammenfallen : planet er løsningsmengden.

3 likninger

Typisk én løsning

④ Generelt lineært likningssystem med n variabler og m likninger

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots a_{mn}x_n = b_m$$

Et lineært likningsystem har én løsning eller vendelig mange løsninger (systemet er konsistent), eller ingen løsninger (inkonsistent).

Koeffisient matrisen til likningssystemet

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} K \\ O \\ L \\ O \\ N \\ N \\ E \end{array} \end{array}$$

RADER (horisontale)

Kolonner eller søyler er vertikale.

Utvida (koeffisient)matrisen
eller
Totalmatrisen til likningssystemet

⑤
$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

<u>Definisjon</u> Radoperasjon

1) Bytte to rader
2) skalere en rad (gange med $c \neq 0$)
3) Legge en rad til en annen rad (gjerne kombinert med steg 2).

Radoperasjonene endrer ikkje løsningsmengden til likningssystemene.
(Vi får et nytt likningssystem med samme løsningsmengde som det vi starket med.)

To likningssystem er <u>ekvivalente</u> hvis de er relaterte med radoperasjoner.

Vi skriver $\sim$ hvis matrisene er ekvivalente.

Likningssystemet

6

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = -3.$

<u>Eksempel</u>

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 0 \\ -6y &= 3 \end{aligned}$$

Utvida matrise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 3 \end{array}\right] \cdot (-2) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 3 \end{array}\right] \cdot \left(\frac{-1}{6}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \end{array}\right] 3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -7/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \end{array}\right] (1/5) \; -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -7/10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \end{array}\right] \cdot 1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8/10 \\ 0 & 0 & 1 & -7/10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \end{array}\right] \text{bytte} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.7 \end{array}\right]$$

Løsningen er <u>$x = 0.8, \; y = -0.5, \; z = -0.7$</u>.

Flere eksempler på Gauss-Jordan eliminerte matriser.

7

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$x = 1$
$z = 2$
y er fri.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$x + 2z = 3$
$y + z = 4$

Løsningsmengden er en linje.

$x = 3 - 2z$
$y = 4 - z$
$z = z$

parametrisert en linje.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \end{array}\right]$$

Ingen løsning

($0 = 10$ aldri sant)

En matrise er på trappeform hvis:

- 0-rader (rader med bare 0-elementer) er nederst i matrisen
- De ledende elementene (element ulik 0 lengst til venstre) beveger seg mot høyre når vi går nedover radene

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ er på trappeform, men

(8) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

er ikkje på trappeform.