27.08.2015

1. En matrise er på trappeform hvis

- 0-rader er nederst i matrisen
- De ledende elementene beveger seg mot høyre etter hvert som vi beveger oss nedover matrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ er på trappeform.

Resultat: Alle matriser er ekvivalent til en matrise på trappeform.

En matrise er på redusert trappeform hvis

- den er på trappeform
- alle ledende element er 1
- En kolonne som inneholder et ledende element har alle andre elementer lik 0.

Matrisene: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

er på redusert trappeform.

Resultat: Alle matriser er ekvivalent til en matrise på redusert trappeform på en <u>entydig</u> måte

Eksempel: Gauss eliminasjon til redusert trappeform:

②

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -4 \\ 1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & 3 \end{array}\right] 2 \quad \begin{array}{c} \cdot(-1) \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{4}$$

(trappeform)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 5 \\ -2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.75 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 \end{array}\right]$$

redusert trappeform

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 4x + 5y + 2z &= 0 \\ -x + 5z &= 2 \end{aligned}$$

har løsning

$x = -0.75$

$y = 0.5$

$z = 0.25$

Eksempel Beskriv alle polynomer p av grad 4 (eller lavere)

slik at punktene (0.0) og (1,1) ligger på

$\cancel{x}$ grafen og $p'(1) = 0$ og $p''(0) = 0$.

(3) $p(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$p(0) = 0$: $p(0) = \underline{a_0 = 0}$

$p(1) = 1$: $a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 1$

$p'(x) = 4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$

$p'(1) = 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0$

$p''(x) = 4\cdot 3 a_4 x^2 + 3\cdot 2 a_3 x + 2a_2$

$p''(0) = 12a_4 \cdot 0 + 6a_3 \cdot 0 + 2a_2 = \underline{2a_2} = 0$

$a_0, a_2 = 0$

$a_4 + a_3 + a_1 = 1$ $\qquad a = a_1$

$4a_4 + 3a_3 + a_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} a_4 + a_3 = 1 - a \\ 4a_4 + 3a_3 = -a \end{pmatrix}$$ alternativ

$\cancel{9}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$ -4

(4) $\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right]$ $\cdot(-1)$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$

Vi parametriserer løsningene med variabel a_1 $(=a)$

$$a_4 = -3 + 2a$$
$$a_3 = 4 - 3a$$
$$a_2 = 0$$
$$a_1 = a$$
$$a_0 = 0$$

~~10~~ 5

9.2 Matriser

$m \times n$ -matrisen
$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} element i matrisen i posisjon (i,j)

i-te rad   j-te kolonne

"i steg ned og j steg bortover".

$m = 1$ $[a_1, \ldots, a_n]$ radvektor $1 \times n$-matrise

$n = 1$ $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ søyle vektor (kolonne) $m \times 1$ matrise

Elementvis skalarmultiplikasjon og addisjon på matriser

$$-3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad 12 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 36 \\ -12 & -24 \end{bmatrix}$$

$$[1, 2] + [3, -4] = [4, -2]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} + \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}}$$

meningsløst!
Vi kan bare legge sammen matriser med samme dimensjoner

⑥ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Transponering

$$[a_{ij}]^T = [a_{ji}]$$

$m \times n$ matrise transponert gir en $n \times m$ Matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

elementene i posisjon (i,j) flyttes over til posisjon (j,i)

Matrise $\underbrace{\text{ved}}_{}$ hjelp av vektorer
beskrevet

$$M = \begin{bmatrix} \vec{s}_1 & \vec{s}_2 & \cdots & \vec{s}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_m \end{bmatrix}$$

$$M^T = \begin{bmatrix} \vec{s}_1^{\,T} \\ \vdots \\ s_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1^{\,T} & \cdots & \vec{r}_m^{\,T} \end{bmatrix}$$

Transponering bytter mellom søyle og radvektorer.

Matrise multiplikasjon

~~12~~ 7

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{s}_1 & \cdots & \vec{s}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{s}_1 & \cdots & \vec{r}_1 \cdot \vec{s}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{r}_m \cdot \vec{s}_1 & \cdots & \vec{r}_m \cdot \vec{s}_n \end{bmatrix}$$

element (i,j) er $\vec{r}_i \cdot \vec{s}_j$ (skalar-produkt)

$(m \times k)$ matrise ganget med en $k \times n$ matrise gir en $m \times n$ matrise

(Minner om prikk (skalar) produktet $[a_1, \dots, a_n] \cdot [b_1, \dots, b_n] = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$)

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \underset{B}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 \, , & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 \\ 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 & 0\cdot 0 + (-1)\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{B}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$ (ikkje kommutativ)

$$2x + 3y = 1$$
$$-3x + 5y = -1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ -3x + 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

0-matrisen $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ alle elementene er lik 0.

~~13~~

8 $\underset{m\times n}{M} + \underset{m\times n}{O} = M$

matriser

Identitetsmatrisene

Kvadratiske matriser

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \; 1 \end{bmatrix}$$

elementene på diagonalen $i=j$ er lik 1

alle andre elementer er lik 0.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M $m\times n$ matrise

$$M \cdot I_n = M = I_m \cdot M$$

Matematikkråds test i 2. time.