14.09.2015

Lineær algebra

(oppsummering så langt)

① Likningssystem

$$2x - 3y = 3$$
$$-5x + 7y = 4$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 7 & 4 \end{array}\right]$$

koeffisientmatrise — totalmatrise

Radoperasjoner
- skalere en rad
- bytte to rader
- legge en rad til en annen

Forenkle likningssystemet til trappeform

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & & \\ 0 & * & * & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

Redusert trappeform (Entydig bestemt)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

Matrise multiplikasjon:
$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

A $n \times n$ matrise. Følgende er ekvivalent:

$$A \sim \underbrace{1_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{\text{redusert trappeform}} \iff A \text{ inverterbar} \iff \det A \neq 0$$

Da er $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\vec{b}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{Adj}(A)$ Beskrivelse ved determinanter

Kan bestemmes ved radoperasjoner $[A \mid 1_n] \sim [1_n \mid A^{-1}]$.

(2)

Lineære transformasjoner

Vektorrom $\mathbb{R}^n$ $n = 1, 2, \ldots$

$m \times n$ matrise M gir en funksjon (transformasjon) fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ ved

($\vec{V}$ i $\mathbb{R}^n$) $\vec{V}$ sendes til $M \cdot \vec{V}$ (i $\mathbb{R}^m$)

Vi skriver gjerne dette som

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\vec{V} \longmapsto M \cdot \vec{V} \quad \text{(matrisemultiplikasjon)}$$

Denne funksjonen (transformasjonen) er lineær:

$$T(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = T(\vec{V}_1) + T(\vec{V}_2)$$
$$T(k \cdot \vec{V}) = k \cdot T(\vec{V})$$

$$\left(\begin{aligned} M \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) &= M \cdot \vec{V}_1 + M \cdot \vec{V}_2 \\ M(k \cdot \vec{V}) &= k\, M \cdot \vec{V} \end{aligned} \right)$$

Resultat

Alle lineære transformasjoner $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er gitt ved en $m \times n$-matrise.

Bevis

$\vec{V}$ i $\mathbb{R}^n$ er en kombinasjon av basis-vektorene $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ V_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ V_n \end{bmatrix}$$

3

$$= V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + \cdots + V_n \vec{e}_n$$

$$T(\vec{V}) = T(V_1\vec{e}_1) + T(V_2\vec{e}_2) + \cdots + T(V_n\vec{e}_n)$$

$$= V_1 T(\vec{e}_1) + V_2 T(\vec{e}_2) + \cdots + V_n T(\vec{e}_n)$$

(siden T er lineær)

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n) \end{bmatrix}}_{m \times n \text{ matrise}} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

Den lineære transformasjonen T er samme transformasjon som vi får ved matrise multiplikasjon med $[T(\vec{e}_1), T(e_2), \ldots, T(\vec{e}_n)]$.

standardmatrisen

Matrise multiplikasjon svarer til sammensetning av lineære transformasjoner.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "S \circ T"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "S"] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

$$M_{S \circ T} = M_S \cdot M_T$$

$S \circ T$ lineær

$S \circ T(\vec{V}) = S(T(\vec{V}))$ sammensetning

(4)

$$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a \cdot x \qquad a \in \mathbb{R}$$

$(a = T(1))$ Alle lineære transformasjoner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er på denne formen.

($x \mapsto 2x+3$ er ikkje en lineær transformasjon)

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto x \cdot y$$

ikkje lineær

$$T\left(k\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}\right) = kx \cdot ky = k^2(x \cdot y) = k^2 T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

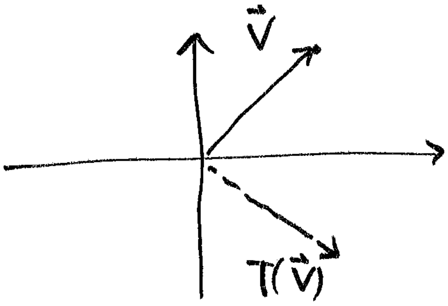
$$T\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \neq x_1 y_1 + x_2 y_2 = T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto 2x + 3y \qquad \text{er lineær}$$

standardmatrisen $[2, 3]$

5

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

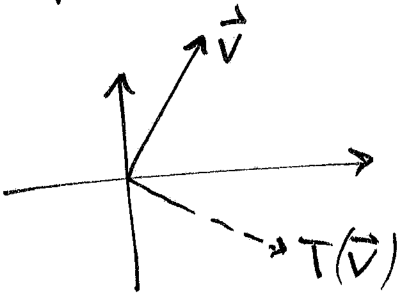


Refleksjon om x-aksen er en lineær transformasjon.

Standardmatrisen til transformasjonen er

$$\left[T(\vec{e}_1),\ T(\vec{e}_2) \right] = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Rotasjon (om origo) 90° med klokken.

Dette er en lineær transformasjon.

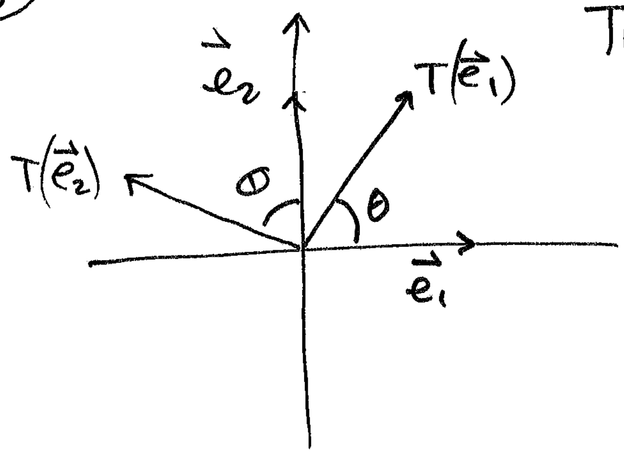
Standardmatrisen er

$$\left[T(\vec{e}_1),\ T(\vec{e}_2) \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}}$$

6

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Rotasjon en vinkel θ mot klokken (om origo)



Transformasjonen er lineær

$$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

standardmatrisen er

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\det M_\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$M_\theta^{-1} = M_{-\theta}$$

Projeksjon $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ned til x-y-planet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

standard matrisen er $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$P \circ P = P^2 = P$$

Hva er standard-matrisen til den lineære transformasjonen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slik at

(7) $T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ og $T\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$.

Vi ønsker å finne $T(\vec{e}_1)$ og $T(\vec{e}_2)$

$$T(\vec{e}_2) = T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = T\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}}$$

$$T(\vec{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$
$$= T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) - T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$$

Standardmatrisen er $\underline{\begin{bmatrix}-3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}}$

$\left([T\vec{e}_1, T\vec{e}_2]\right)$

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3x+2y\\x+y\end{bmatrix}$$

(8) Finn standardmatrisen til den lineære transformasjonen $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ slik at

$$T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix} \qquad T\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$T(\vec{v}_1) = \vec{u}_1 \qquad T(\vec{v}_2) = \vec{u}_2$$

Standardmatrisen er $[T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2)]$

Vi ønsker å uttrykke $\vec{e}_1$ og $\vec{e}_2$ ved hjelp av $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \vec{e}_1 \text{ (eventuelt } \vec{e}_2\text{)}$$

$$x \cdot v_1 + y \cdot v_2 = \vec{e}_1$$

T lineær

$$T(\vec{e}_1) = x \cdot T(v_1) + y\, T(v_2) = [T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\vec{e}_1 \quad \text{setter inn}$$

$$T(\vec{e}_i) = [T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)]\,[\vec{v}_1, \vec{v}_2]^{-1}\,\vec{e}_i \qquad i = 1,2$$

setter sammen og benytter $[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = I_2$

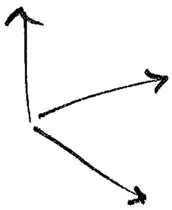
$$[T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2)] = \underline{[T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)]\,[\vec{v}_1, \vec{v}_2]^{-1}}$$

I vårt eksempel:

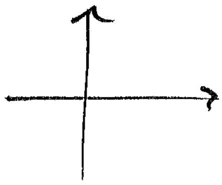
standardmatrisen er $\begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & -1\\3 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}^{-1}$

$$= \begin{bmatrix}1 & 2\\-2 & -1\\3 & 0\end{bmatrix} \cdot \Bigg(\underbrace{-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & -2\\-1 & 1\end{bmatrix}}_{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}}\Bigg) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & 0\\-3 & -3\\3 & 6\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}}}$$

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R} = \mathbb{R}$ $\longrightarrow$

$\mathbb{R}^0 = 0$ $\quad\cdot\quad$ består bare av null-vektoren.

$\mathbb{R}^4$? vanskelige å visualisere.

Vektorrom

Vi har sum $\quad \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

null-vektor $\quad \vec{0} \quad (\vec{v} + \vec{0} = \vec{v})$

additiv invers $\quad \vec{v}$, invers $-\vec{v} \quad (\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0})$

skalarmultiplikasjon $\quad \underset{\text{skalar}}{k} \cdot \underset{\text{vektor}}{\vec{v}}$ ny vektor.

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

$$l(k \cdot \vec{v}) = l \cdot k \, \vec{v}$$

$$(l+k)\vec{v} = l \cdot \vec{v} + k \cdot \vec{v}$$

$$k(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = k \cdot \vec{v}_1 + k \vec{v}_2$$

k, l skalarer.