21.sep 2015

Kontinuerlige funksjoner

Reelle funksjon $\qquad f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$

definisjonsmengden

(1) for eks: $[1,2]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $(1,\infty)$

En funksjon er en regel som til hvert element x i definisjonsmengden tilordnett ett tall $f(x)$.

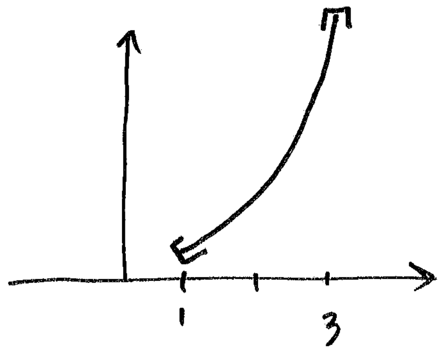
Alle funksjonsverdiene til f kalles <u>verdimengden</u> til f og skrives V_f

<u>Eks.</u> 1) $f(x) = x^2$ $\qquad D_f = [1,3]$

funksjonsuttrykk

$V_f = [1, 9]$

Grafen til f



] endepunktet er med

),), ∘ endepunktet er ikkje med

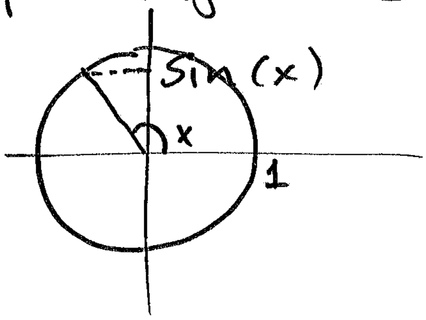
2) Funksjon gitt som en tabell $\qquad D_f = \{0,1,2,3,4\}$

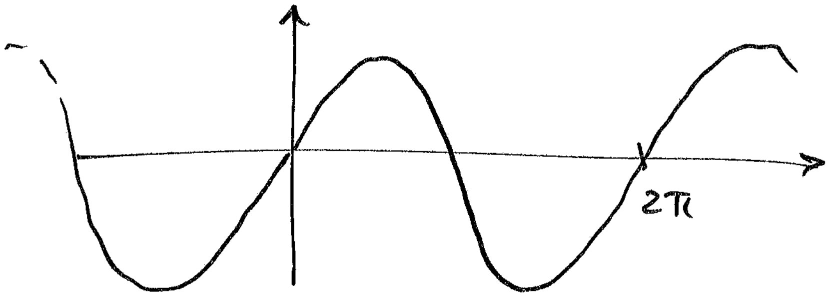
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	-13	2.73	π	$-3/15$

Funksjon definert geometrisk

3)

2





Når vi skriver $f(x) = \frac{1}{x-2}$ (uten å spesifiser D_f) er det underforstått at vi bruker den naturlige definisjonsmengden (alle x hvor uttrykket gir mening).

$\frac{1}{x-2}$ har naturlig def. mengde $x \neq 2$
(alternativ notasjon $\langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$)

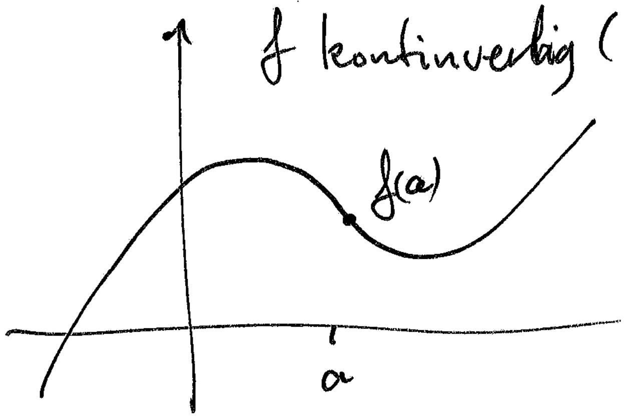
$\frac{1}{\ln x}$ —— " —— $\langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$

$\sqrt{x^2-4}$ —— " —— $\langle -\infty, -2] \cup [2, \infty\rangle$

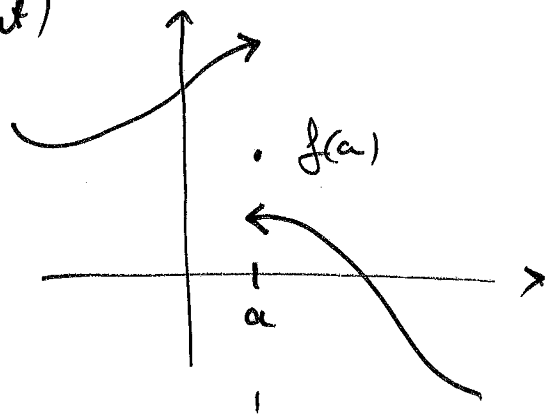
Def. En funksjon $f(x)$ er kontinuerlig i $x=a$ hvis
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

(grensen av $f(x)$ når x nærmer seg a fra venstre)

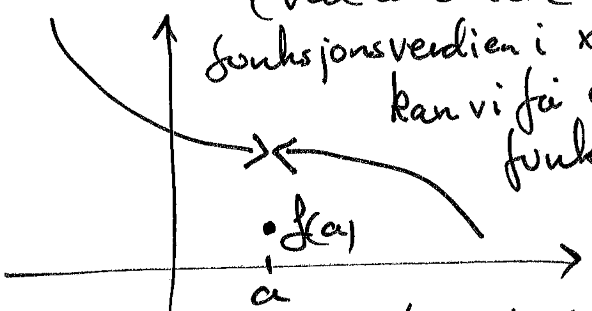
f kontinuerlig (i alle punkt)



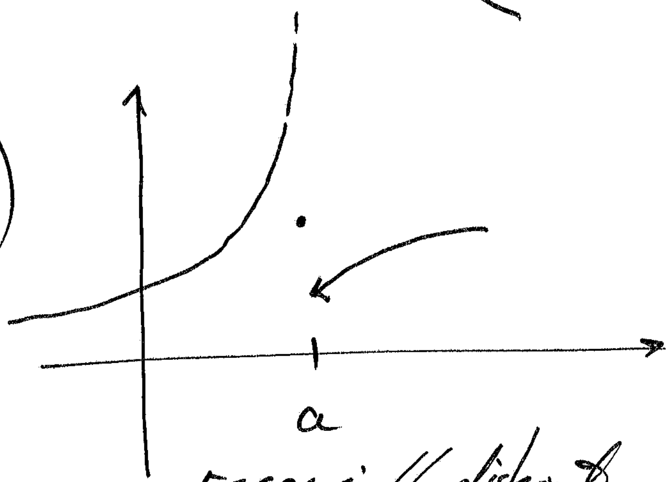
Hopp-diskontinuitet



(ved å endre funksjonsverdien i $x=a$ kan vi få en kont. funksjon i $x=a$)



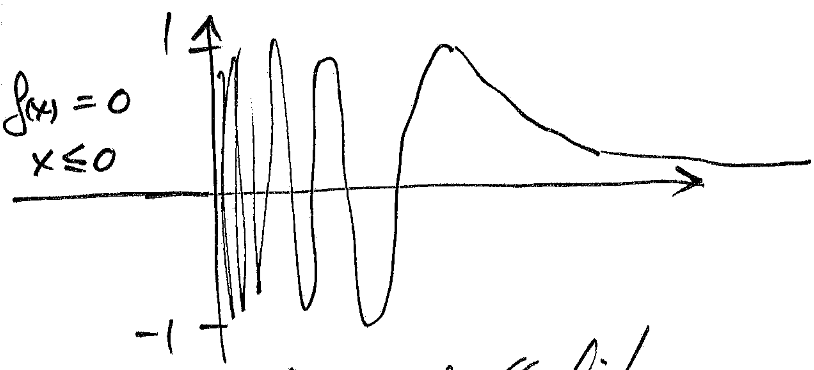
Hevbar diskontinuitet



Essensiell diskont.

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad x>0$

$f(x)=0$
$x\leq 0$

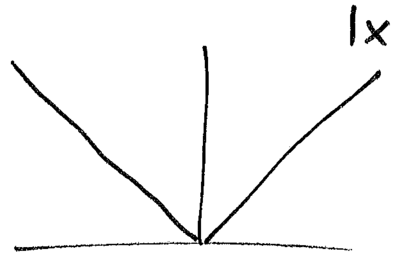


Essensiell disk.

Det siste eksempelet er en funksjon gitt med <u>delt forskrift</u>

(4) $$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$



Absoluttverdifunksjonen gitt med delt forskrift

kontinuerlig funksjon (ikkje deriverbar i $x=0$)

<u>Eksempel</u>: Bestem a slik at

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3x & x \geq 1 \\ 2ax+2 & x < 1 \end{cases}$$

blir en kontinuerlig funksjon (i $x=1$)

$$f(1) = 4 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2ax+2 = \underline{2a+2}$$

$f(x)$ er kont i $x=1$ $\Leftrightarrow$ $4 = 2a+2 \Leftrightarrow \underline{\underline{a=1}}$

Resultat: Hvis $f(x)$ er deriverbar i $x=a$, så er $f(x)$ kontinuerlig i $x=a$

Alle polynomer, $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$ er kontinuerlige funksjoner.

Sammensetning av kontinuerlige funksjoner er igjen kontinuerlige.

5 $\sin(x^2\cos(e^{x+3}))$ etc er kontinuerlige.

Til orientering.

Presis definisjon av kontinuitet.

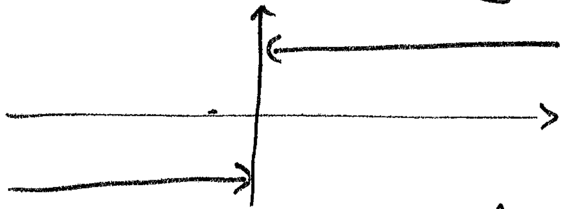
$f(x)$ er kontinuerlig i $x = a$ hvis:

For alle $\epsilon > 0$ så finnes det en $\delta > 0$ slik at $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ når $|x - a| < \delta$

(6) Hvor er funksjonene diskontinuerlige?

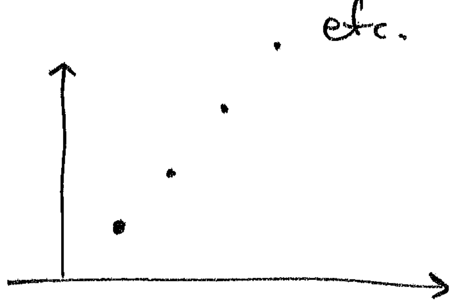
$$f(x) = \frac{x}{|x|} \qquad (x \neq 0)$$

Kontinuerlig for alle $x \in D_f$



$f(n) = n \qquad n$ naturlig tall

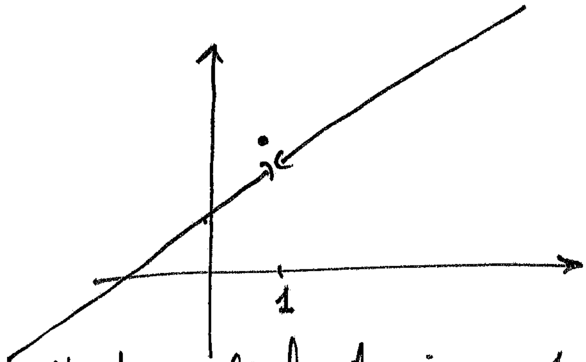
Kontinuerlig



$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 2.2 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} (x+1) = \underline{2} \neq g(1)$$

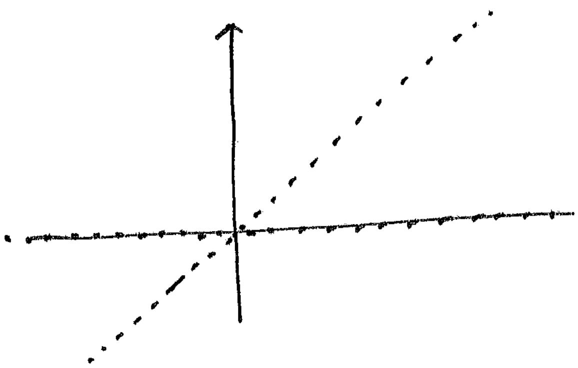


Hevbar diskont. i $x = 1$

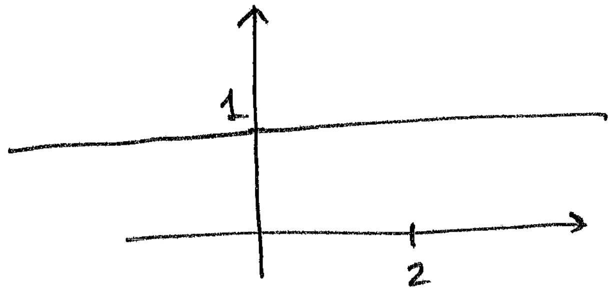
$$h(x) = \begin{cases} x & x \text{ rasjonalt tall} \\ 0 & x \text{ irrasjonalt tall} \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$ kontinuerlig i $x=0$.

h er diskontinuerlig i alle andre punkt.



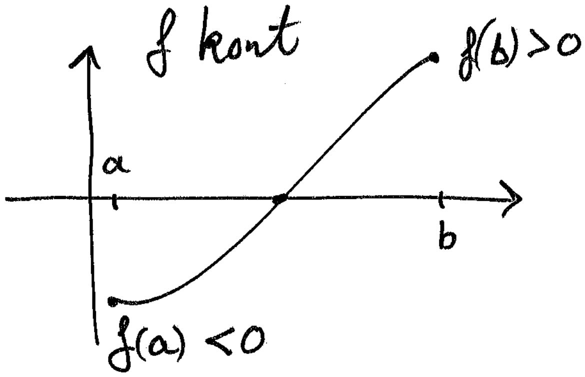
$$k(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{10^6} & x \geq 2 \\ 1 & x < 2 \end{cases}$$



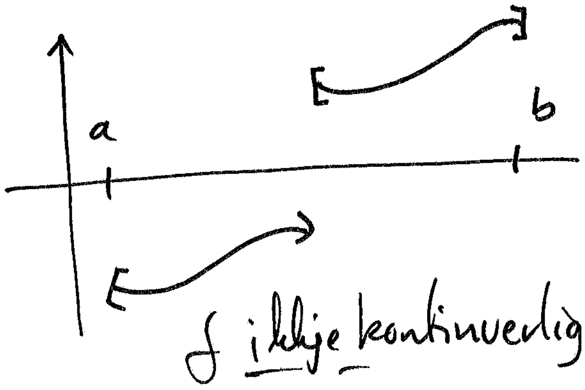
Diskontinuerlig i $x = 2$.

(Men grafen ser kontinuerlig ut.)

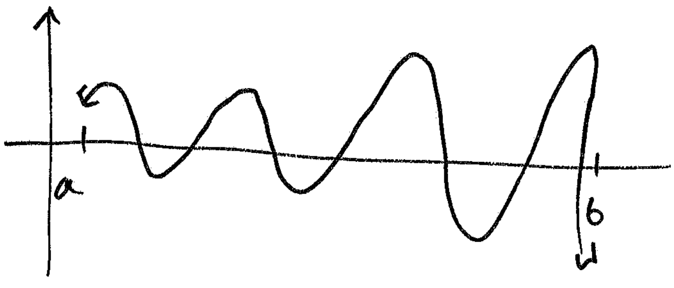
Skjæringssetningen



Anta $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon på $[a,b]$.
Hvis $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn,
da finnes det en $x \in [a,b]$ slik at
$f(x) = 0$ (nullpunkt).

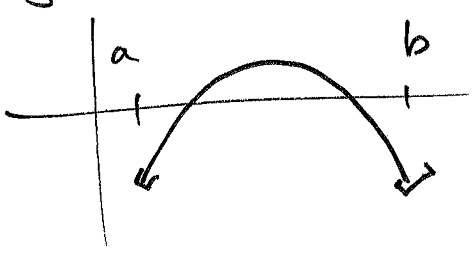


$f(x)$ def på $[a,b]$
f har ingen nullpunkt
selv om $f(a)$ og
$f(b)$ har motsatte fortegn.



Det kan være mange nullpunkt.

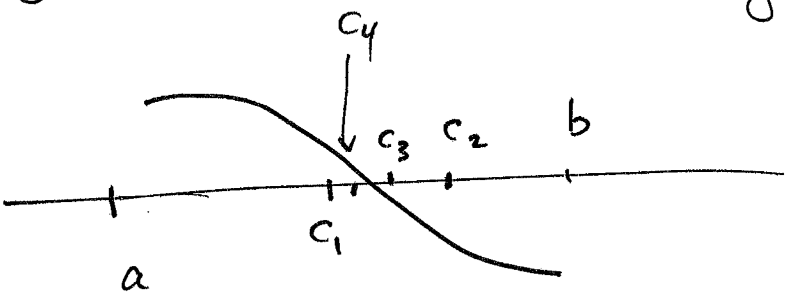
Selv om $f(x)$ er kontinuerlig og $f(a)$ og $f(b)$
har samme fortegn. kan det være nullpunkt



⑧ Hvordan finne (estimere) nullpunkt?

Halveringsmetoden:

f kontinuerlig
$[a, b]$



$f(a) \cdot f(b) < 0$ (forskjellig fortegn)

Algoritme for å estimere nullpunkt

starter med $a < b$ $f(a) \cdot f(b) < 0$

1) $c = \dfrac{a+b}{2}$ (punkt midt mellom a og b)

2) - $f(c) = 0$ da har vi funnet et nullpunkt

- $f(c) \neq 0$

Hvis $f(a) \cdot f(c) > 0$, erstatt a med c

ellers $f(a) \cdot f(c) < 0$, erstatt b med c

gjenta prosedyren med ny a og b.

Prosedyren avsluttes etter et oppgitt antall iterasjoner eller når avstanden $b-a$ er blitt mindre enn en oppgitt positiv verdi.

Halveringsmetoden egner seg godt til å utføre maskinelt

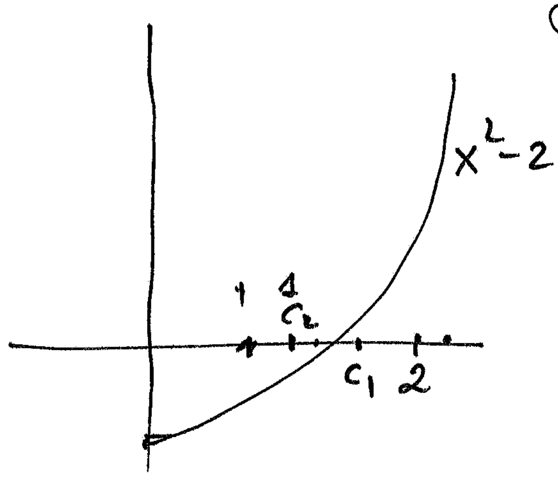
Estimere $\sqrt{2}$

$$x^2 = 2$$

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

$\sqrt{2}$ er positivt nullpunkt til $f(x)$.

9



$$f(1) = -1$$

$$f(2) = 2$$

f kontinuerlig.

$a_1 = 1$ $\quad$ $b_1 = 2$ $\quad$ $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = 1{,}5$

$$f(1{,}5) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{9-8}{4} = \frac{1}{4} > 0$$

$a_2 = 1$ $\quad$ $b_2 = \frac{3}{2} = 1{,}5.$ $\quad$ $c_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} = 1{,}25 = \dfrac{5}{4}$

$$f(c_2) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 2 = \frac{25}{16} - 2 = \frac{-7}{16} < 0$$

$a_3 = \frac{5}{4}$ $\quad$ $b_3 = \frac{3}{2}$ $\quad$ $c_3 = \dfrac{\frac{5}{4} + \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{11}{8}$

...

(så langt kan vi konkludere med at

$$\frac{5}{4} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}.$$)

Skjæringssetningen gir eksistens av

(10) n-te røtter : $m > 0$

$f(x) = x^n - m$ $n \geq 1$

$f(x) = 0 \iff x^n - m = 0 \iff x^n = m$

$f(0) = -m < 0$

$f(m+1) = (m+1)^n - m > 0$

$f(x)$ kontinuerlig funksjon

skjæringssetningen sier at $f(x)$ har et nullpunkt $[0, m+1]$.

Dette viser eksistens av $\underline{\sqrt[n]{m}}$.

Nøyaktigheten til halveringsmetoden :

Lengden på intervallet $[a, b]$ halveres for hver iterasjon som utføres med halveringsmetoden

$[a, b] \to [a_1, b_1] \to \cdots \to [a_n, b_n]$

$$(b_n - a_n) = \frac{1}{2^n}(b - a)$$

$2^{10} = 1024$ $2^{20} = 1048576 \sim 10^6$

$2^{40} \sim 10^{12}$