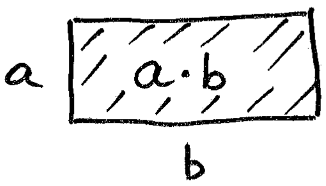
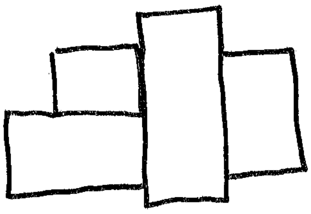
5. oktober
2015

Bestemte integraler (5.1)

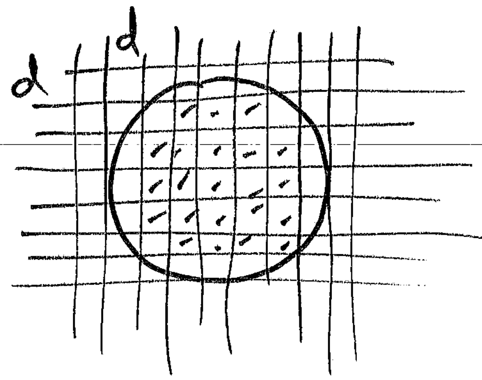
(1)



arealet til et rektangel



arealet er summen av arealene til hver av rektanglene. (uavhengig av hvordan regionen er bygd opp av rektangler)



øvre estimat for arealet: summen av arealene til alle rektangler som møter sirkelen

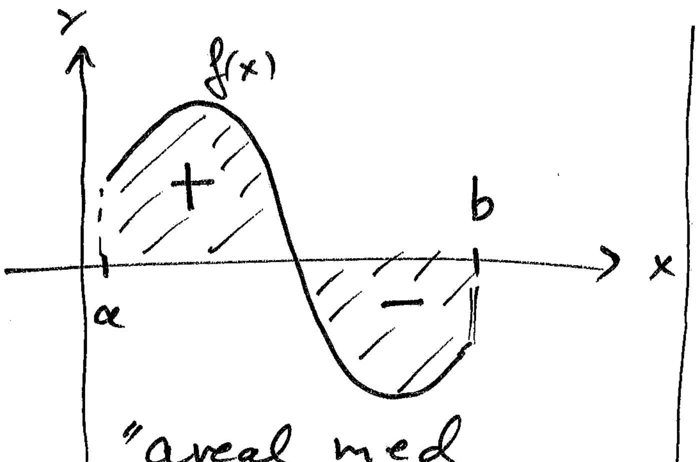
≥ areal til sirkelen

≥ nedre estimatet for arealet: summen av arealene til alle rektangler helt inni sirkelen.

Vi lar rutenettet bli mer og mer finmasket. I grensen hvor $d \to 0$ vil øvre og nedre estimat ha samme grenseverdi.

Arealet til sirkelen

Vi avgrenser oss til regioner mellom x-aksen og grafen til funksjoner



"areal med fortegn"

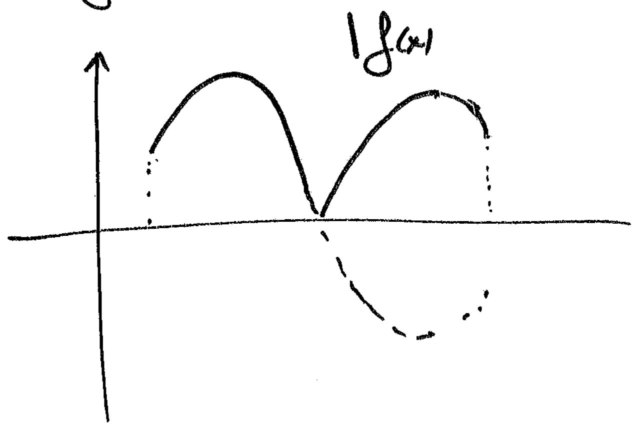
Det bestemte integralet av $f(x)$ fra a til b er areal over x-aksen − areal under x-aksen begrenset av $f(x)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Bestemte integral behøver ikkje eksistere.

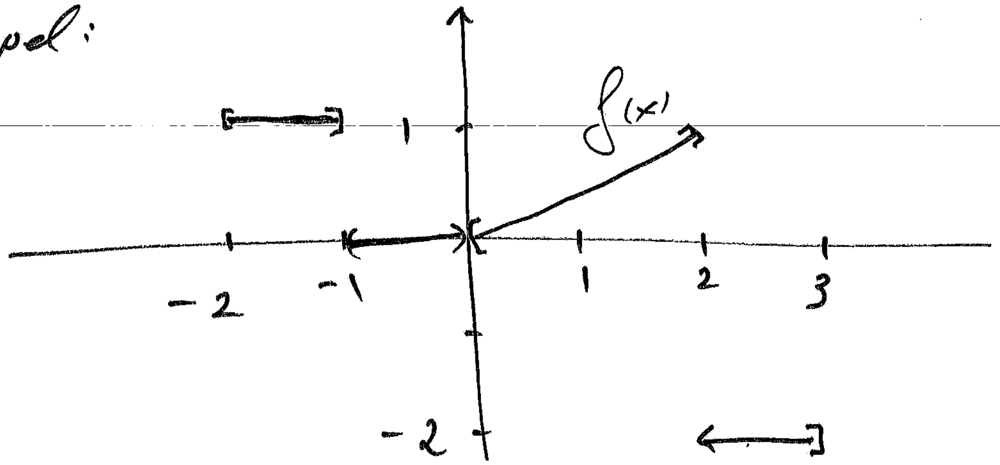
Arealet mellom grafen til $f(x)$ og x-aksen

er: $\int_a^b |f(x)|\, dx$



(2)

Eksempel:



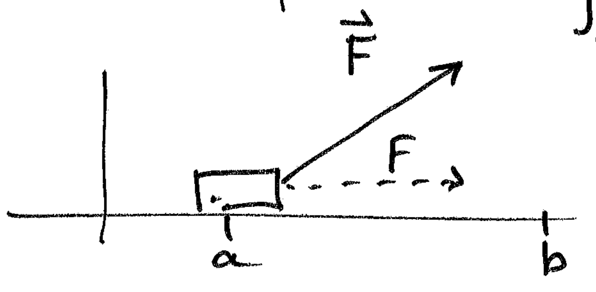
$$\int_{-2}^{3} f(x)\, dx = 1 + 0 + 1 + (-2) = 0$$

Fortolkning: * $V(t)$ fart (til en lekebil langs en rett bane)

$\int_a^b V(t)\, dt$ forflytting fra $t=a$ til $t=b$

Distansen kjørt er $\int_a^b |V(t)|\, dt$.

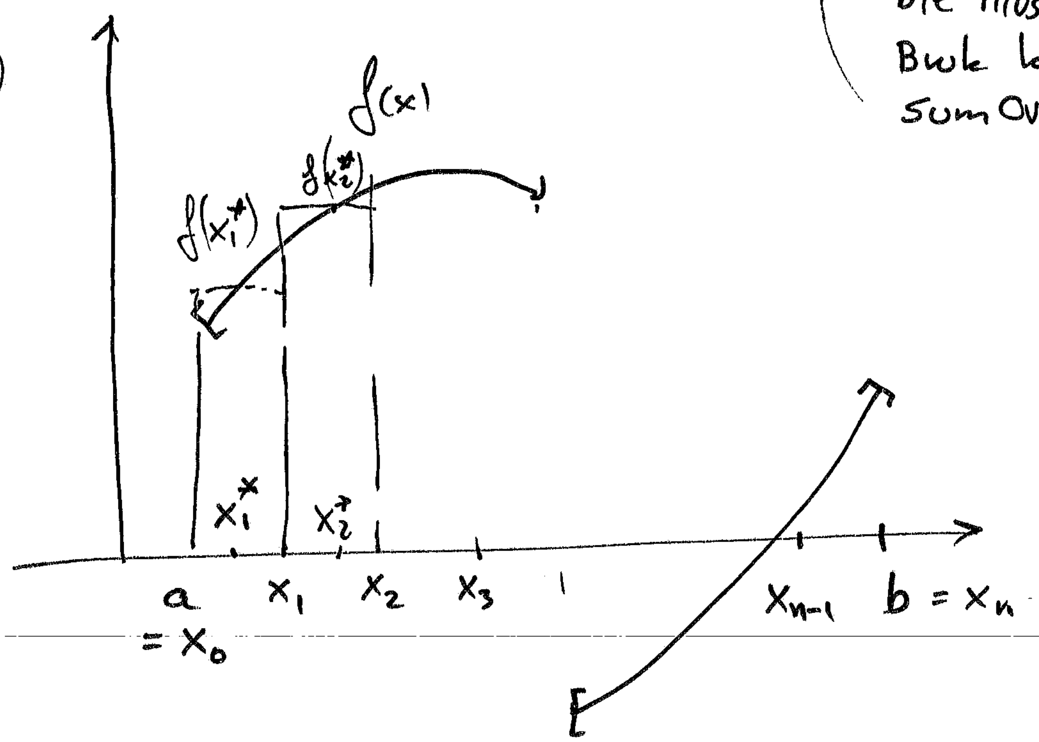
* Arbeid utført $\int_a^b F\, dx$ ← kraft i x-retning.



Riemann integral

(Øvre og nedre sum for $y = x^3$ fra -2 til 3 ble illustrert i geogebra. Bruk kommandoene sumOver, sumUnder)

③



Partisjon av intervallet $[a,b]$:
Deler opp $[a,b]$ i n delintervaller
$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$.

Hvis lengden på hver delintervall er lik sier vi at partisjonen er regulær.

Da er $x_i = a + \frac{b-a}{n}\cdot i$

En seleksjon av punkt (gitt en partisjon) er et valg x_i^* i $[x_{i-1},x_i]$, for hver $i=1,\ldots,n$.

Riemann sum (gitt partisjon og seleksjon)

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot(x_i - x_{i-1})$$

(estimat for et areal med fortegn mellom grafen til f og x-aksen.)

Hvis grensen over alle partisjoner

4 og seleksjoner eksisterer, da sier vi at $f(x)$ er Riemann <u>integrerbar</u> på $[a,b]$. Grensen er det bestemte integralet $\int_a^b f(x)\,dx$.

Resultat

Alle (stykkevis) kontinuerlige funksjoner er integrerbare.

Kommentarer:

Vi burde ha avgrenset oss til begrensa funksjoner. $\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad \dots \right)$

(se forkurs notater 2013.)

Funksjonen $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{irrasjonale } x \\ 0 & \text{rasjonale } x \end{cases}$ er

Ikkje Riemann integrerbar.

Egenskaper til bestemte integral:

Integrasjon er lineær (funksjonsrom av integrerbare funksjoner $\to \mathbb{R}$)

Hvis f og g er integrerbare på $[a,b]$, da er også $k f(x) + l \cdot g(x)$ integrerbar.

$$\int_a^b k \cdot f(x) + l\, g(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx + l \int_a^b g(x)\,dx$$

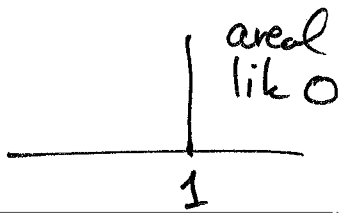
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Hvis $f(x)$ er integrerbar på $[a,b]$ og $[b,c]$, da er $f(x)$ også integrerbar på $[a,c]$.

5

$$\int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^1 f(x)\,dx = \int_1^1 f(x)\,dx$$

$$= 0$$

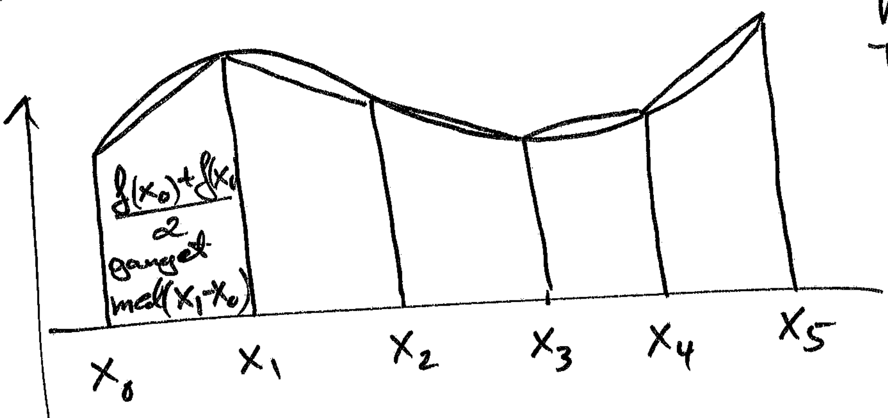


$$\int_b^a f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} -\int_a^b f(x)\,dx \qquad a < b$$

Nummerisk integrasjon (5.4)

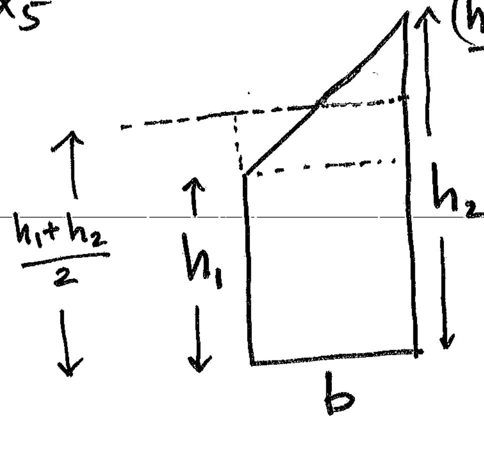
6

Vi illustrerer trapes-metoden for $n=5$. Tilsvarende for generell n.



Trapesmetoden

arealet til trapeset er $\frac{(h_1+h_2)}{2} \cdot b$



Estimat for arealet:

$$\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2} + \frac{f(x_3)+f(x_4)}{2} + \frac{f(x_4)+f(x_5)}{2}\right] \overbrace{\frac{x_5-x_0}{5}}^{\text{bredden}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + \frac{1}{2}f(x_5)\right)\frac{x_5-x_0}{5}$$

Trapesmetoden gir helt nøyaktig resultat for lineære funksjoner (selv med $n=1$).

Resultat: Feilen ved bruk av trapesmetoden er ikkje større enn $\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}\left(\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\right)$

Eksempel (ikkje gjennomgått)

$f(x) = x^3$ 　　　 $a = -2$, $b = 3$

7

$f'(x) = 3x^2.$ 　　　 $\max_{x \in [-2,3]} |f''(x)| = 18.$

$f''(x) = 6x$

Feil ved bruk av trapesmetoden er avgrenset av $\frac{1}{12} \frac{(3-(-2))^3}{n^2} \cdot 18$

$$= \frac{18}{12} \cdot 5^3 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{375}{2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Når $n = 500$ er dette lik $\frac{3}{2} \cdot 5^3 \cdot \frac{1}{(5 \cdot 100)^2}$

$$= 7.5 \cdot \frac{1}{100^2} = 0.00075$$

Eksakt verdi $\int_{-2}^{3} x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-2}^{3} = 16.25$

(Simpsons metode gir eksakt verdi)

Trapesmetoden med $n = 500$: ~ 16.250125

Faktisk feil er $\sim$ 0.000125

odde og jevne funksjoner

$f(x)$ er en odde funksjon hvis

$$f(-x) = -f(x)$$

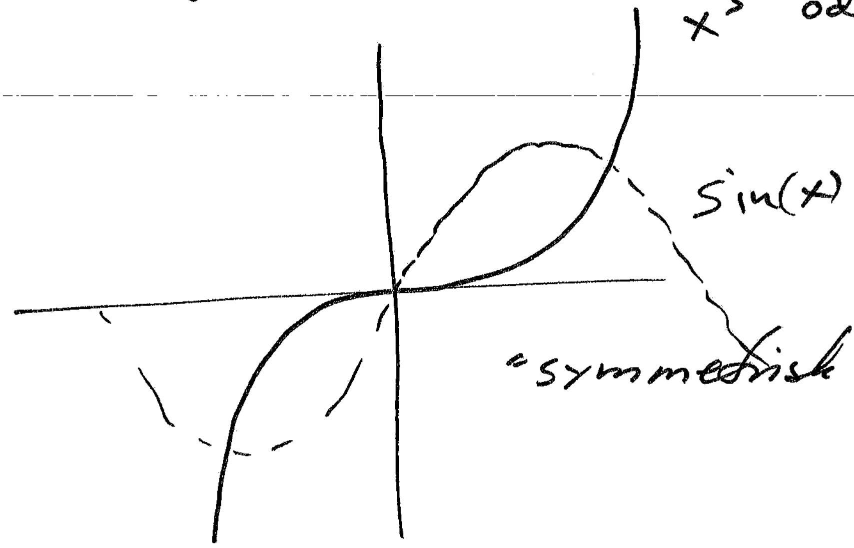
og D_f er symmetrisk (x er med $\Leftrightarrow$ $-x$ er med i D_f)

8

$f(x)$ er en jevn funksjon hvis

$$f(-x) = f(x)$$

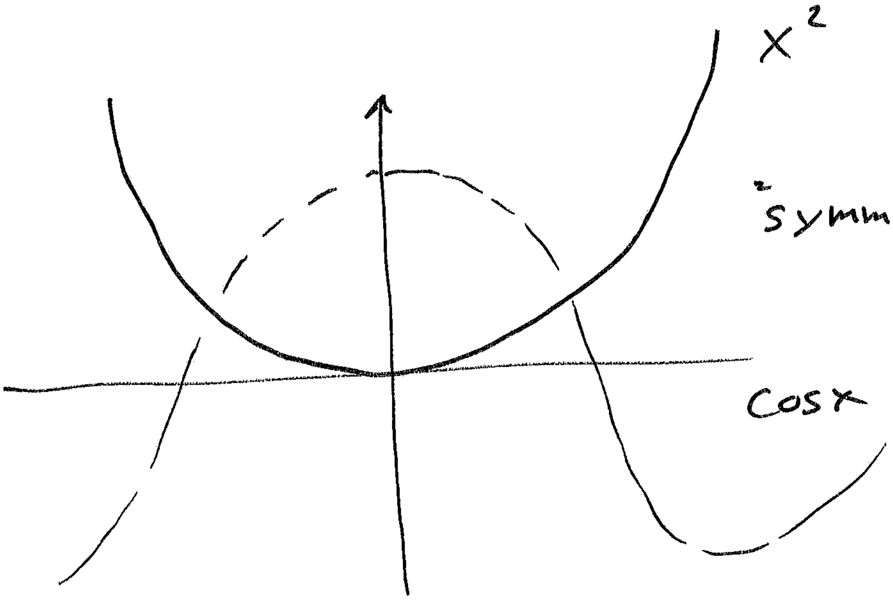
x^3 odde funksjon



$\sin(x)$ odde funksjon

"symmetrisk om origo"

x^2 jevn funksjon



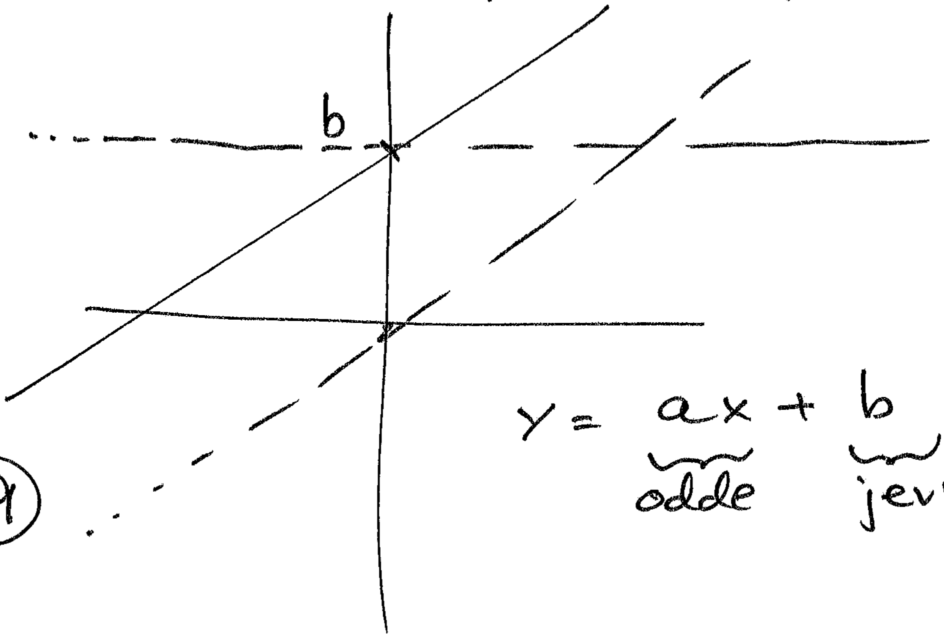
"symmetrisk om y-aksen"

$\cos x$ jevn funksjon

x^m odde funksjon m odde tall

jevn funksjon m jevnt tall.

$y = ax + b$ ikkje en jevn eller odde funksjon $(a \neq 0,\ b \neq 0)$



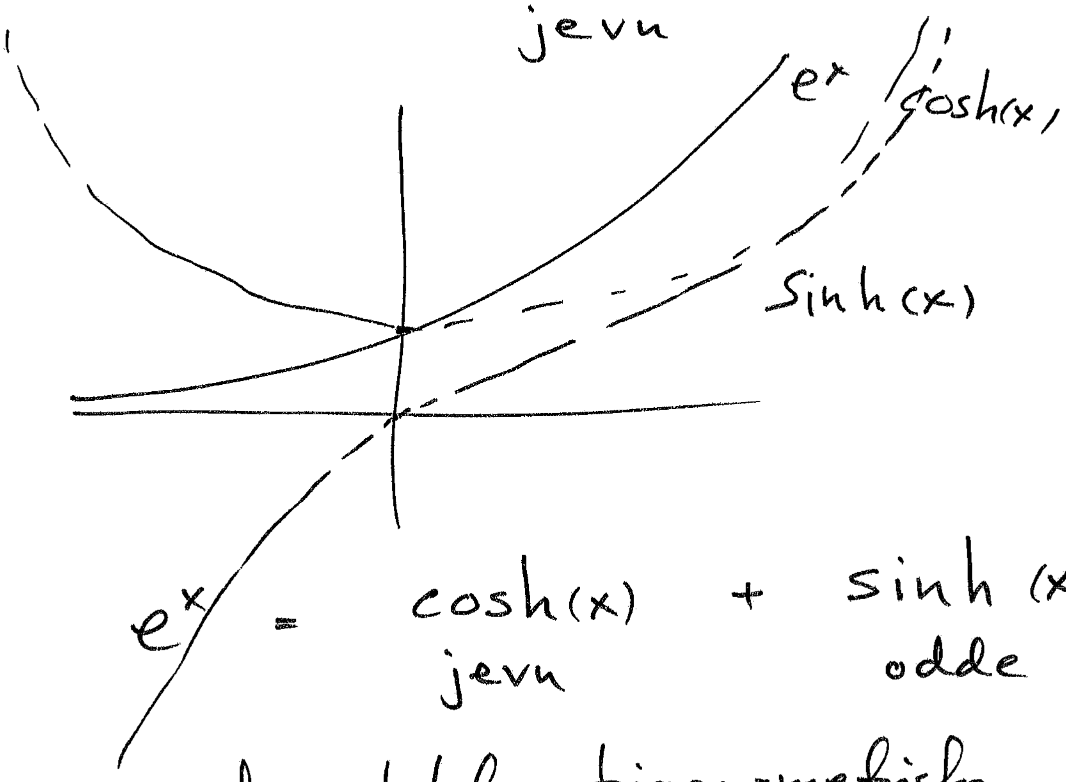
men en sum av en jevn og en odde funksjon.

$$y = \underbrace{ax}_{\text{odde}} + \underbrace{b}_{\text{jevn}} \quad \text{funksjon}$$

9

Alle funksjoner (med symmetrisk def. mengde) er en sum av en odde og en jevn funksjon.

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{f(x) + f(-x)}{2}\right)}_{\text{jevn}} + \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(-x)}{2}\right)}_{\text{odde}}$$



$$e^x = \underbrace{\cosh(x)}_{\text{jevn}} + \underbrace{\sinh(x)}_{\text{odde}}$$

hyperbolske trigonometriske funksjoner

$$\left(\cosh(ix) = \cos(x), \quad \sinh(ix) = i \sin x\right)$$

For mer info se eget (forkurs) notat om odde og jevne funksjoner