29.10
2015

Første ordens lineære differensiallikninger

(1) $$y' + f(x)\cdot y = g(x)$$ (lineær i y' og y)

Eksempel $$x\cdot y' + y = x^2+1$$

(deler med x : $y' + \left(\frac{1}{x}\right)\cdot y = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$)
$x \neq 0$

ikke separabel

$$x\cdot y' + y = (x\cdot y)'$$

$$(x'\cdot y + x\cdot y' = y + x\cdot y')$$

Benytter denne innsikten :

$$(x\cdot y)' = x^2+1$$

så $$x\cdot y = \int x^2+1\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x + k$$

deler med x : $$y(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + x + k\right)$$

$$= \underline{\frac{x^2}{3} + 1 + \frac{k}{x}}$$

$$y' + 2y = e^{-x} \qquad y(0) = 2$$

$$(h(x)\cdot y)' = h(x)\cdot y' + h'(x)\cdot y$$

$$= h(x)\left(y' + \frac{h'(x)}{h(x)}\cdot y\right)$$

ønsker $h(x)$ slik at $\frac{h'(x)}{h(x)} = f(x)$.

$$(e^{2x})' = 2e^{2x}$$

$$(y\cdot e^{2x})' = e^{2x}(y' + 2\cdot y)$$

Ganger diff. likningen med e^{2x} :

$$(y \cdot e^{2x})' = e^{2x}(y' + 2y) = e^{2x}(e^{-x})$$

(2)

$$= e^{2x-x} = e^{x}$$

så $$y e^{2x} = \int e^{x} dx$$
$$= e^{x} + K$$

deler med e^{2x} (gange med e^{-2x})

$$y(x) = e^{-2x}(e^{x} + K)$$
$$= \underline{e^{-x} + K e^{-2x}}$$

initialbetingelsen : $y(0) = 2$ gir

$$y(0) = e^{0} + Ke^{0} = 1 + K = 2$$
$$K = 1$$
$$\underline{y(x) = e^{-x} + e^{-2x}}$$

Generelt : La $F(x)$ være en antiderivert til $f(x)$. $F'(x) = f(x)$.

$$(e^{F(x)})' = e^{F(x)} \cdot F'(x) = e^{F(x)} \cdot f(x)$$

integrerende faktor

$$(e^{F(x)} \cdot y)' = e^{F(x)}(y' + f(x)y) = e^{F(x)} g(x)$$

integrerer :

$$e^{F(x)} \cdot y = \int e^{F(x)} \cdot g(x) \, dx$$

$$\boxed{y(x) = e^{-F(x)} \int e^{F(x)} \cdot g(x) \, dx}$$

Hvis $g(x) \equiv 0$, er likningen homogen

$$y' + f(x)y = 0$$

Skalering og sum av løsninger er også løsninger.

Fra formelen ovenfor er løsningene

$$y(x) = e^{-F(x)} \int 0 \, dx = K e^{-F(x)}.$$

Direkte: $y' = -f(x)y$ separabel

③

$$\frac{y'}{y} = -f(x)$$

$$\frac{dy}{y} = -f(x)\,dx$$

$$\ln|y| = -F(x)$$

Så $y(x) = Ke^{-F(x)}$.

Når er $y' + f(x)y = g(x)$

$y' = -yf(x) + g(x)$ separabel?

Når $f(x)$ eller $g(x)$ er identisk lik 0, og når $f(x) = \text{konst.} \cdot g(x)$.

Eksempel: $y' + 3y = \sin x$ $y(0) = 0$

Eksamen (juni 2012)

$f(x) = 3$ $g(x) = \sin x$

$F(x) = 3x$

$$(y \cdot e^{3x})' = e^{3x} \sin x$$

$$y \cdot e^{3x} = \int e^{3x} \sin x \, dx$$

(4) $\int \underbrace{e^{3x}}_{u} \underbrace{\sin x}_{v'} \, dx$ $\qquad V = -\cos x$

delvis int. $= u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$

$= e^{3x}(-\cos x) - \int 3e^{3x}(-\cos x)\, dx$

$= -e^{3x}\cos x + 3 \int \underbrace{e^{3x}}_{w} \underbrace{\cos(x)}_{z'} \, dx$ $\qquad z = \sin x$

$= -e^{3x}\cos x + 3\left[e^{3x} \cdot \sin x - \int 3e^{3x} \cdot \sin x \, dx\right]$

$\int e^{3x} \sin x \, dx = 3e^{3x}\sin x - e^{3x}\cos x - 3^2 \int e^{3x} \sin x \, dx$

$(1+9)\int e^{3x}\sin x \, dx = 3e^{3x}\sin x - e^{3x}\cos x + c$

$\int e^{3x}\sin x \, dx = \frac{1}{10} \cdot e^{3x}(3\sin x - \cos x) + c$

$\underline{y(x) = \frac{1}{10}(3\sin x - \cos x) + e^{-3x} \cdot c}$

$y(0) = 0$ gir: $\frac{-1}{10} + c = 0$, $c = \frac{1}{10}$

$\underline{y(x) = \frac{1}{10}(3\sin x - \cos x + e^{-3x})}$

Eksempel

$$x \cdot y' + 2y = -x^2 + 3 \qquad x > 0$$

$$y' + \frac{2}{x} y = -x + \frac{3}{x}$$

$$\int \frac{2}{x} dx = 2\ln|x| + c$$

integrerende faktor : $e^{2\ln|x| + c}$

$$= e^c \cdot \left(e^{\ln|x|}\right)^2$$

$$= e^c \cdot |x|^2 = e^c x^2.$$

velger x^2

$$x^2 \left(y' + \frac{2}{x} y\right) = x^2 y' + 2xy$$

$$= (x^2 \cdot y)'$$

$$(x^2 \cdot y)' = -x^3 + 3x$$

$$x^2 \cdot y = \int -x^3 + 3x \, dx$$

$$= -\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2} x^2 + C$$

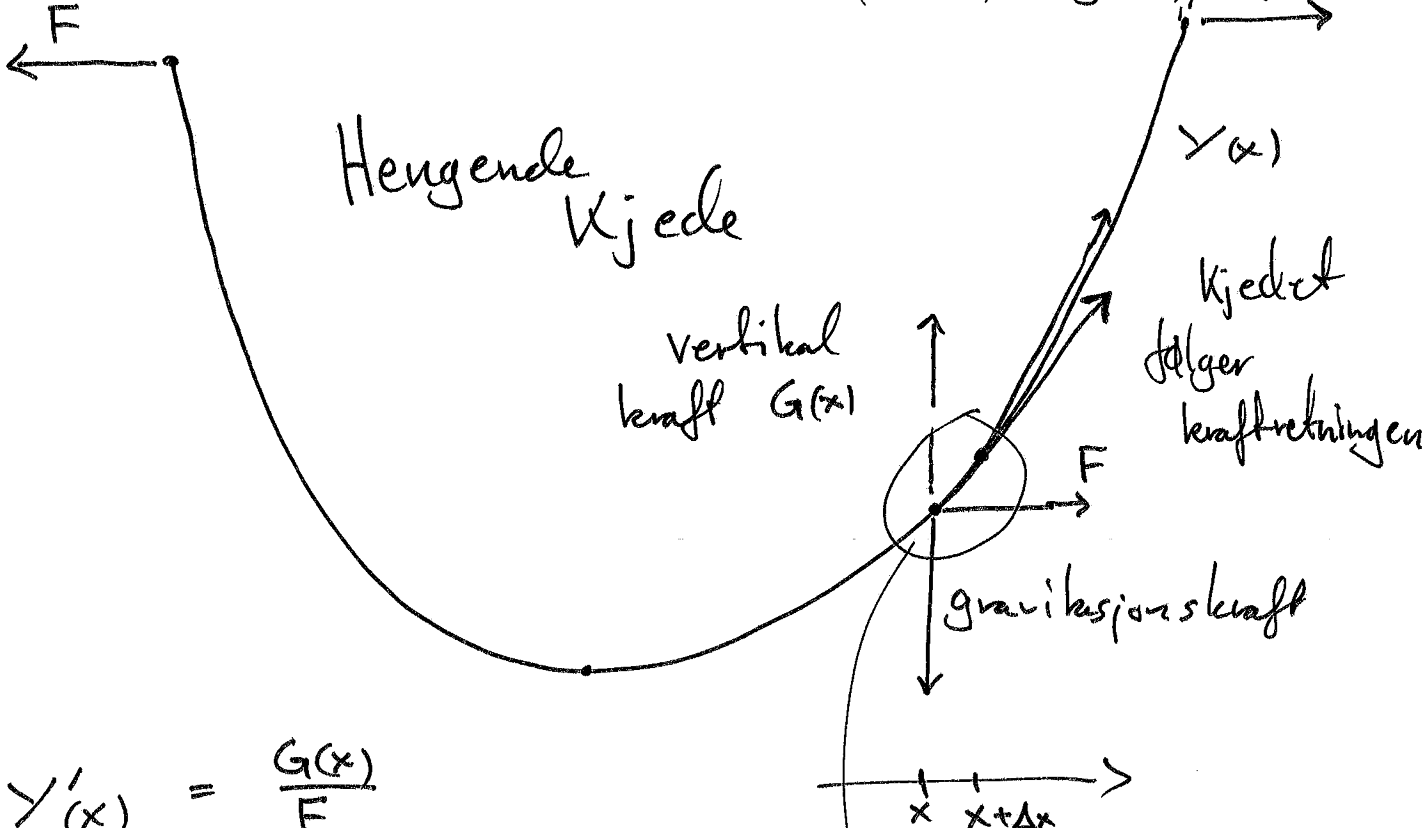
så $$y(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2} + \frac{C}{x^2}$$

Her følger to eksempler
på modelering som
leder til en differensialligning.

Kjede som henger fritt
homogen massetetthet ρ
(masse/lengde)

(5)

Hengende Kjede



$$y'(x) = \frac{G(x)}{F}$$

$$G(x+\Delta x) - G(x)$$

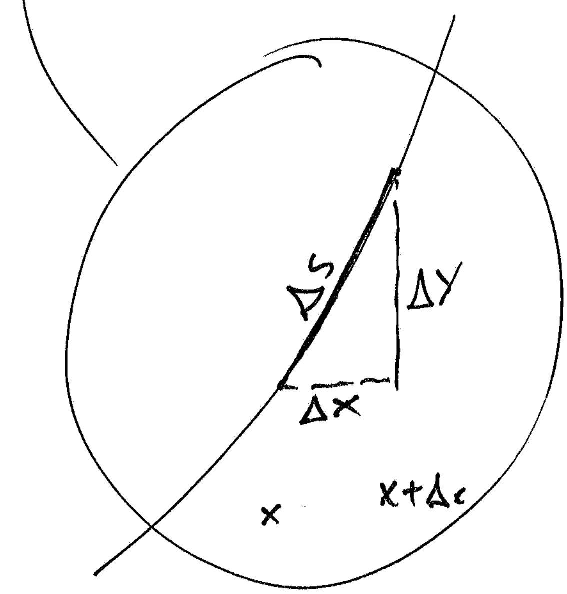
= vekten til kjedestykket fra x til $x+\Delta x$

$$\cong g \cdot \rho \, \Delta x \sqrt{1+(y')^2}$$

$$y''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{G(x+\Delta x)}{F} - \frac{G(x)}{F}}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{F} \lim_{\Delta x \to 0} g\rho \frac{\Delta x}{\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$y'' = \frac{g\rho}{F} \sqrt{1+(y')^2}$$



$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= \Delta x \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$\Delta x \to 0$

$$ds = dx \sqrt{1+(y')^2}$$

2 ordens differensiallikning i y

Det er også en 1. ordens diff.likning i y'!

6 $\quad \frac{\theta\rho}{F} = k \qquad (y')' = k\sqrt{1+(y')^2}$.

En løsning er $y' = \sinh(k(x-x_0))$ (fri parameter x_0)

$y'' = k\cosh(k(x-x_0))$

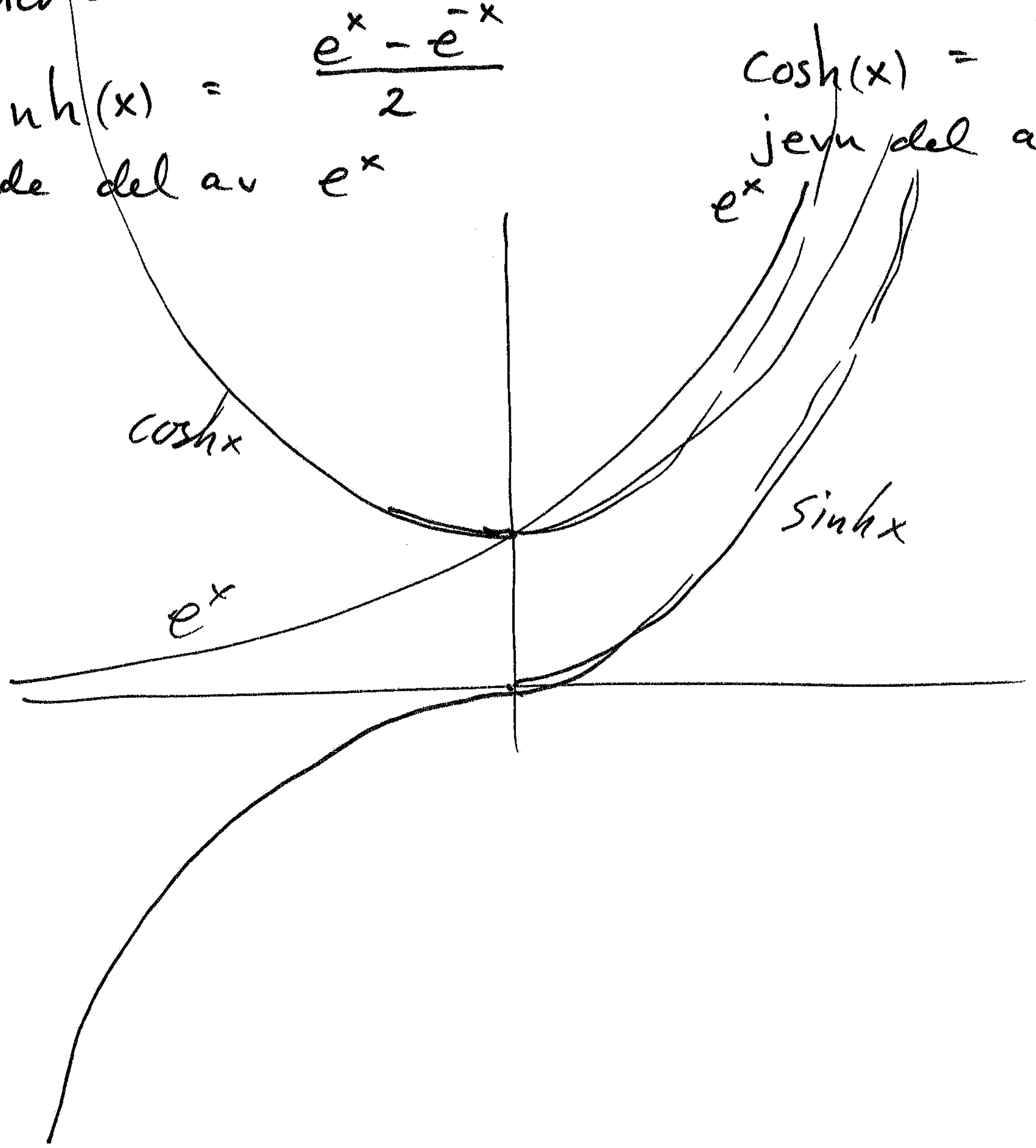
$\cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u \qquad \cosh u > 0$

$\cosh u = \sqrt{1+\sinh^2 u}$

Minner om:

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
odde del av e^x

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
jevn del av e^x

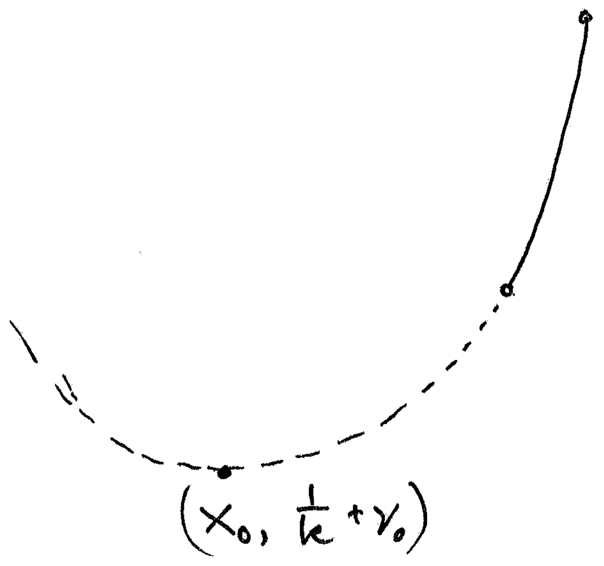


$$y' = \sinh(k(x-x_0))$$

$$y(x) = \int \sinh(k(x-x_0))$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{k}\cosh(k(x-x_0)) + y_0 \qquad k = \frac{g \cdot \rho}{F}.}$$

7. Bunnpunktet til kjedet (hvis det blir utvidet slik at det har bunnpunkt) er i $\left(x_0, \frac{1}{k} + y_0\right)$



Modellen stemmer bra med observasjoner.
Forsøk gjerne med et smykkekjede.

(8)

$$A + B \longrightarrow C$$

Kjemisk reaksjon (irreversibel)
c_A, c_B, c_C konsentrasjoner.

$$\frac{dc_A}{dt} = \frac{dc_B}{dt} = -k\, c_A \cdot c_B$$

$$c_A(0) = A \qquad c_B(0) = B$$

Konsentrasjoner ved start

$$\frac{dc_A/dt}{dc_B/dt} = \frac{dc_A}{dc_B} = 1$$

$$\underline{c_A = A - B + c_B}$$ (som forventet!)

setter dette inn i diff. likningen for c_B

$$\frac{dc_B}{dt} = -k\,(A - B + c_B)\, c_B$$

separabel diff. likning

$$\frac{dc_B}{c_B(A - B + c_B)} = -k\,dt$$

Tilfellet: $A = B$

$$\int \frac{dc_B}{c_B^2} = \int -k\,dt$$

konstant

$$\int (c_B)^{-2}\, dc_B = \frac{-1}{c_B} = -k \cdot t + l$$

$$c_B = \frac{+1}{kt - l}$$

$$c_B(0) = B = \frac{+1}{-l} \quad \text{så} \quad l = \frac{-1}{B}.$$

$$C_A(t) = C_B(t) = \frac{1}{kt + \frac{1}{B}} \quad A = B$$

(9)

Konsentrasjonen går sakte mot 0 (som $\frac{1}{t}$)

Tilfellet $A \neq B$ (ulike konsentrasjon av substans A og B)

Anta $A > B$ (Det andre tilfellet er analogt.)

$$\frac{1}{C_B(K + C_B)} = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{C_B} - \frac{1}{K + C_B}\right) \quad \Big| \; K = A - B > 0$$

Diff. likningen: $\frac{1}{K}\left(\frac{1}{C_B} - \frac{1}{K + C_B}\right) dC_B = -k\,dt$

integrerer:

$$\frac{1}{K}\left(\ln|C_B| - \ln|K + C_B|\right) = -kt + \underset{\text{konstant}}{\ell}$$

$$\ln\left|\frac{C_B}{K + C_B}\right| = -kKt + K\ell$$

exp(...)

Så $$\frac{C_B}{K + C_B} = M e^{-kKt}$$ konstant M.

setter $t = 0$ for å bestemme M:

$$\frac{B}{A - B + B} = \underline{\frac{B}{A}} = M e^0 = \underline{M}$$

Løser for C_B:

$$C_B = (K + C_B)\,\frac{B}{A}\,e^{-kKt}$$

→

$$c_B\left(1-\frac{B}{A}e^{-kKt}\right) = K\frac{B}{A}e^{-kKt}$$

10

$$c_B = \frac{kB\,e^{-kKt}}{A-B\,e^{-kKt}}$$

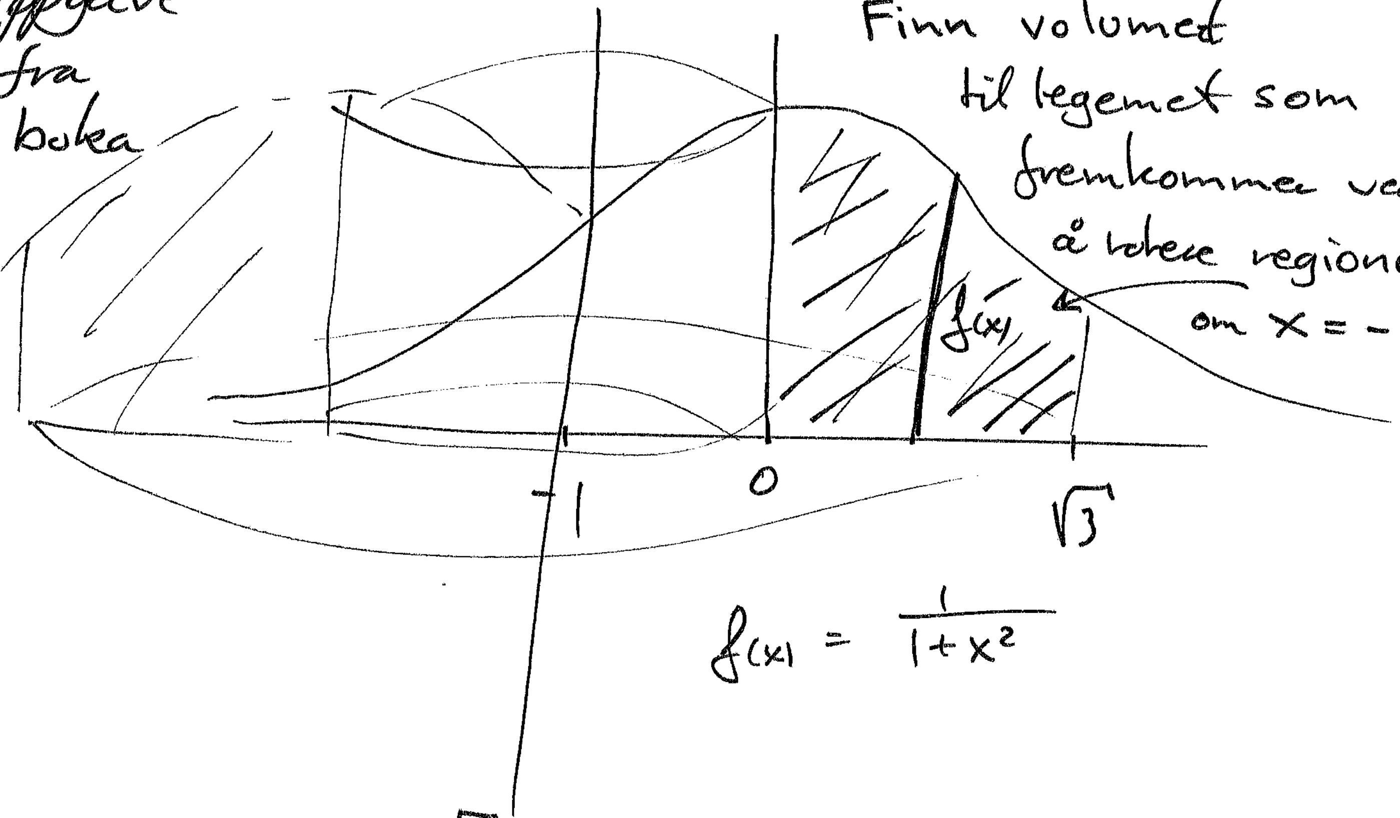
Setter inn
$K = A - B$

$$c_B(t) = \frac{B(A-B)\,e^{-k(A-B)t}}{A-B\,e^{-k(A-B)t}}$$

$$c_A = A - B + c_B$$

I dette tilfellet ser vi at konsentrasjonen av stoffet det er minst av, B, går mot null veldig raskt (som e^{-t})

oppgave fra boka



Finn volumet til legemet som fremkommer ved å rotere regionen om $x = -1$.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$V = \int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,(1+x)\cdot 2\pi\, dx$$

$u' = 2x$
$u = 1+x^2$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{1+x^2}\, dx$$

$$= 2\pi\left(\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2}\, dx\right)$$

$$\left(\arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} + \int_*^* \frac{\frac{1}{2}\, du}{u}\right)$$

$$= 2\pi\left(\arctan(\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\sqrt{3}}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{\pi}{3} + \underbrace{\frac{1}{2}\ln 4}_{\ln 2}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{\pi}{3} + \ln 2\right)$$ Boka 6.1 oppg 5 c)

$$= \frac{2\pi^2}{3} + 2\pi \ln 2$$