2 nov. 2015

Andre ordens diff. likninger med konstante koeffisienter

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

Eksempel $\quad y'' - 4y = 0 \quad y(0) = 6$

$y'(0) = 2$

$\boxed{\text{Forsøker med } y(x) = e^{rx}}$

$y' = r e^{rx} = r \cdot y$

$y'' = r^2 \cdot y$

Setter inn: $\quad y'' - 4y$

$= (r^2 - 4) \cdot y = 0$

y er en løsning $\Leftrightarrow \quad r^2 - 4 = 0$

$r = -2$ eller 2.

$y(x) = e^{-2x}$ og $y(x) = e^{2x}$ er løsninger.

$y(x) = (A \cdot e^{-2x} + Be^{2x})$ er også en løsning for alle A, B

Løser initialverdiproblemet:

$y(0) = A + B = 6$

$y'(0) = -2A + 2B = 2 \quad (-2Ae^{-2x} + 2Be^{2x} = y')_{x=0}$

deler med 2: $\quad -A + B = 1$

Så $(A+B) + (-A+B) = 2B = 6 + 1 = 7$.

$B = \frac{7}{2}$, $A = B - 1 = \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$. $\quad y(x) = \frac{1}{2}\left[5e^{-2x} + 7e^{2x}\right]$

Homogene diff. likningen $\qquad (f(x) \equiv 0)$

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$$

Hvis y_1 og y_2 er to løsninger, da er også $Ay_1 + By_2$ (en lineær kombinasjon) en løsning for alle A og B. :

$$(Ay_1 + By_2)'' + p(Ay_1 + By_2)' + q(Ay_1 + By_2)$$

$$(Ay_1'' + By_2'') + p(A \cdot y_1' + B \cdot y_2') + q(Ay_1 + By_2)$$

$$A(\underbrace{y_1'' + p y_1' + q y_1}_{0}) + B(\underbrace{y_2'' + p y_2' + q y_2}_{0}) = 0$$

Inhomogen diff. likning

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

La y_1 og y_2 være løsninger. Da er $y_1 - y_2$ en homogen løsning.

$$(y_1 - y_2)'' + p(y_1 - y_2)' + q(y_1 - y_2) =$$

$$(\underbrace{y_1'' + p y_1' + q y_1}_{f(x)}) - (\underbrace{y_2'' + p y_2 + q y_2}_{f(x)}) = 0$$

Løsningene er på formen $\qquad$ (siden $y - y_p$ er homogen løsning)

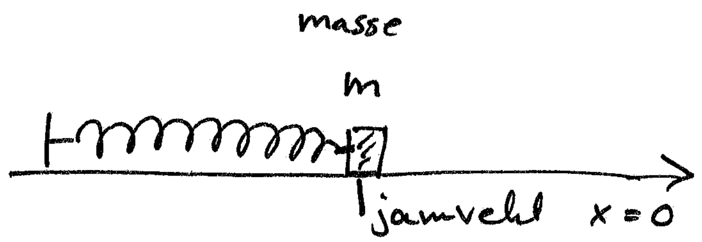
$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

$y(x)$: (En løsning til den inhomogene diff.lik)

$y_p(x)$: partikulær løsning

$y_h(x)$: homogene løsningene

Harmoniske svingninger



Hooks lov — kraften fra fjæren er proporsjonal til forflytting fra jamvektsposisjon.

$$F = -k \cdot x \qquad k > 0$$

Newtons andre lov $\quad m \cdot x''_{(t)} = -kx$

$$m x'' + k \cdot x = 0$$

$$x'' + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Løsningene er $\quad x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

Perioden til svingningene :

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\, T = 2\pi \qquad \underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

(Anta $y(x) = e^{rx}$ setter inn :

$$\left(r^2 + \frac{k}{m}\right) x = 0$$

Løsning : $\quad r = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\, i$

$$y(x) = A e^{\sqrt{\frac{k}{m}} i \cdot t} + B e^{-\sqrt{\frac{k}{m}} i \cdot t}$$
)

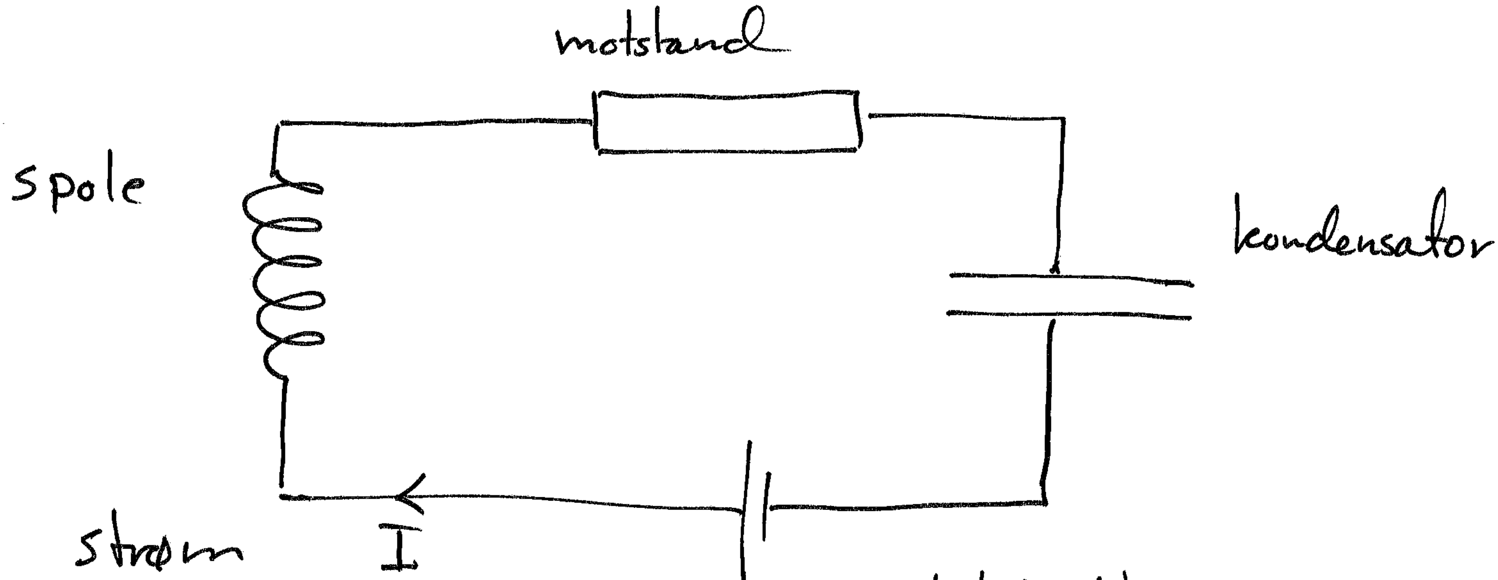
Anta det er friksjon tilstede som er proporsjonal til farten (farten liten!)

$$F = -\ell x' \qquad \ell > 0$$

$$m \cdot x'' = -\ell x' + (-kx)$$

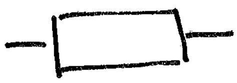
$$x'' + \frac{\ell}{m} x' + \frac{k}{m} x = 0$$

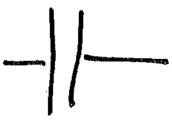
Elektrisk krets

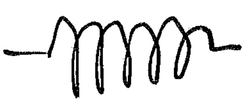


Ladning Q, $Q' = I$. spenningskilde $U(t)$

Spenninger over komponentene:

 resistanse R : $R \cdot I = R \cdot Q'(t)$ (Ohm's lov)

 kapasitans C : spenning: $\frac{Q}{C}$

 induktans L : spenning $L I' = L Q''$

Kirchhoffs lov(er)

$$L \cdot Q'' + R Q' + \frac{1}{C} Q = U(t)$$

$$\boxed{Q'' + \left(\frac{R}{L}\right) Q' + \frac{1}{LC} Q = \frac{U(t)}{L}}$$

Mer detaljer og eksempler: Fysikk notater F0340   4 mai 2009.

Løsningene til det generelle homogene 2.ordens lineære systemet

$$y'' + py' + qy = 0.$$

$y(x) = e^{rx}$ gir

$$(r^2 + p\cdot r + q)\cdot y(x) = 0$$

Løsningene til $r^2 + pr + q$ er

$$r = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-4q}}{2}$$

$p^2-4q > 0$ to reelle løsninger r_1, r_2

$$\underline{y(x) = Ae^{r_1\cdot x} + Be^{r_2 x}}$$

(overdempet)

$p^2 - 4q < 0$ to komplekse løsninger

$$r = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\, i$$

$$y(x) = e^{-(p/2)\cdot x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cdot x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}x\right)\right)+c$$

(underdempet)

$p^2 - 4q = 0$ $\quad r = \frac{-p}{2}$ (dobbel rot)

(kritisk dempet) En løsning : $e^{-px/2}$.

En annen løsning er $\underline{x}\cdot e^{-px/2}$.

$$(Ax+B)\,e^{-px/2}.$$

De deriverte til funksjonene ovenfor er av samme type (på samme form) som funksjonene selv!

Eksempel $y'' + 4y' + 13y = 0$

Anta $y(x) = e^{r \cdot x}$

$$(r^2 + 4r + 13)\, y(x) = 0$$

$$r^2 + 4r + 13 = 0$$

$$(r+2)^2 - 4 + 13 = 0$$

$$(r+2)^2 = -9$$

$$r + 2 = \pm 3i$$

(Underdempet)

$$r = -2 \pm 3i$$

$$\underline{y(x) = e^{-2x}\left(A\cos(3x) + B\sin(3x)\right).}$$

(kritisk dempet.)

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

$y = e^{rx}$ gir

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$(r+2)^2 = 0 \qquad \underline{r = -2}$$

$$y(x) = e^{-2x}.$$

La oss sjekke at $y = x \cdot e^{-2x}$ også er en løsning:

$$y' = 1 \cdot e^{-2x} + x\, e^{-2x} \cdot (-2)$$

$$y'' = 2(-2)e^{-2x} + x(-2)^2 e^{-2x}$$

setter inn:

$$x\left((-2)^2 e^{-2x} + 4(-2)e^{-2x} + 4e^{-2x}\right)$$
$$\underbrace{\left(2(-2)e^{-2x} + 4\cdot e^{-2x}\right)}_{0} = 0$$

Dette stemmer.

Løsningene er $\underline{y(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x}}$.

Repetisjon om Eulers formel:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cos x$$
$$\cosh(ix) = \cos x$$

og $\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \sin x$

$$\sinh(ix) = i\sin x.$$

$$Ae^{ix} + Be^{-ix} = (A+B)\cos x + i(A-B)\sin x.$$

Reell når $B = \bar{A}$:

$$Ae^{ix} + \bar{A}e^{-ix} = 2\,\mathrm{Re}\left(Ae^{ix}\right)$$
$$= \underline{2(\mathrm{Re}\,A)\cos x - 2(\mathrm{Im}\,A)\sin x}.$$

Eksempel på en inhomogen likning:

$$y'' - 4y = 10e^{3x}$$

Homogene løsningene: $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$.

Forsøker med $y_p(x) = K \cdot e^{3x}$. $y_p'' = 9 \cdot y_p(x)$

$$y_p'' - 4y_p = (9-4)\,y_p(x) = 5 \cdot K \cdot e^{3x}$$
$$= 10e^{3x}$$

$y_p(x)$ er en løsning når $5K = 10$
$\underline{K = 2}$

Så $y_p = 2e^{3x}$ er en partikulær løsning.

Løsningene er: $y(x) = y_p + y_h$
$$= \underline{2e^{3x} + Ae^{2x} + Be^{-2x}}$$

Vi løser nå initialverdi problemet $y(0) = 6$
$y'(0) = 2$

Setter inn: $2 + A + B = 6$

$6 + 2A - 2B = 2$

Så $2A - 2B = 2 - 6 = -4$. Deler med 2:
$A - B = -2.$

$$(2 + A + B) + (A - B) = 6 + (-2)$$
$$2 + 2A = 4, \quad A = \frac{4-2}{2} = \underline{1}$$

$B = +2 + A = \underline{+3}$

$$y(x) = \underline{2e^{3x} + e^{2x} + 3e^{-2x}}$$