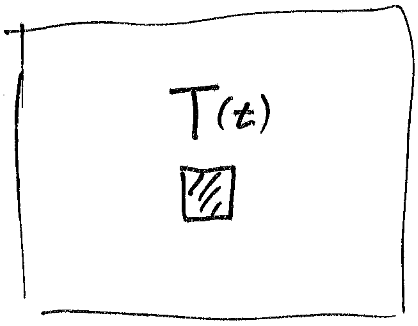
5.11.2015

# ① Newtons avkjølingslov

( inhomogen 1. ordens lin. diff. likning )




$T_0$
(uavhengig av varmestrøm til/fra objektet med temp $T(t)$ )

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0) \qquad k > 0$$

Anta at starttemperaturen er $T_1$
(start $t=0$)

$$T' = -k(T - T_0) \qquad \text{(separabel)}$$

$$T' + kT = kT_0 \qquad \text{(konstant)}$$

1 Finner de homogene løsningene:

$$T' + k \cdot T = 0 \qquad \left( \begin{array}{l} \int (T \cdot e^{kt})' dt = \int 0 \, dt \\ T \cdot e^{kt} = A \quad \text{konst} \end{array} \right)$$

$$T(t) = A \cdot e^{-kt} \qquad \text{konstant } A$$

2 Finner én løsning til $T' + kT = kT_0$
(én partikulær løsning)

En løsning er $T(t) = T_0$

3 Løsningene til $T' + kT = kT_0$

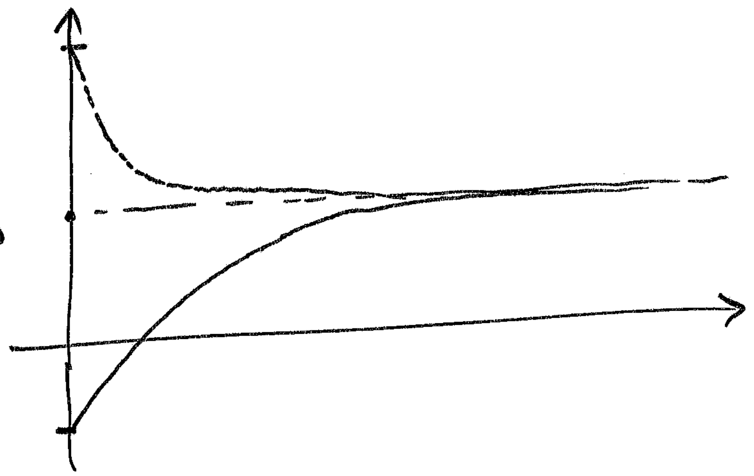
er $T(t) = \underbrace{T_0}_{\text{partikulær}} + \underbrace{A e^{-kt}}_{\text{homogene}}$

$T(0) = T_1$ setter inn:

(2) $T(0) = T_1 = T_0 + A e^{-0} = T_0 + A$

så $A = T_1 - T_0$

$$\underline{T(t) = T_0 + (T_1 - T_0) e^{-kt}}$$



Eksempel $T_1 = 200°C$ $T_0 = 0°C$

Etter én time er temp. sunket til $100°C$.
Hvor lang tid tar det før temp. blir $25°C$?

Setter inn i løsningen til diff. likningen:

$100°C = 0°C + (200°C) e^{-k \cdot 1}$

så $e^{-k} = \frac{1}{2}$ og $\underline{k} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-1} = \underline{\ln(2)}$

$25°C = 200°C \, e^{-kt}$

$\frac{1}{8} = e^{-kt}$ og $k \cdot t = \frac{\ln(1/8)}{-1} = \ln 8$

$t = \frac{\ln 8}{k} = \frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{\ln 2^3}{\ln 2} = \frac{3 \ln 2}{\ln 2} = \underline{\underline{3}}$ timer fra starten

3

# Inhomogene lineære 2.ordens diff. likninger med konst. koeff.

$$y'' + p y' + q y = f(x)$$

p, q konstanter

1) Finn de homogene løsningene

dvs. løsningene til $y'' + p y' + q y = 0$

2) Finn én løsning til $y'' + p y' + q y = f(x)$

3) De generelle løsningene er

$$y(x) = \underbrace{y_p}_{\substack{\text{partikulær}\\ \text{løsning}\\ (2)}} + \underbrace{y_h}_{\substack{\text{homogene}\\ \text{løsningene}}}$$

4.10.2 i boka gir en liste over hva $y(x)$ må være for utvalgte $f(x)$

Vi ser på noen eksempler.

Eksempel (4)

$$y'' + 2y' + y = 2x - 1$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = -3$$

Homogene løsninger : $y(x) = e^{rx}$

$$\underbrace{(r^2 + 2r + 1)}_{(r+1)^2} e^{rx} = 0$$

$r_{*} = -1$ er en dobbel rot

$e^{-x}$ er en løsning

$x e^{-x}$ er også en løsning

$$y_h(x) = A e^{-x} + B \cdot x e^{-x}$$

---

Finner en partikulær løsning.

Forsøker med $y_p = Ax + B$

$y_p' = A \qquad y_p'' = 0$

Setter inn : $2y_p' + y = 2 \cdot A + Ax + B = 2x - 1$

$Ax = 2x \qquad \underline{A = 2}$

$2A + B = -1 \qquad 4 + B = -1 \qquad \underline{B = -5}$

$$y_p = 2x - 5$$

---

Løsningene er $y(x) = 2x - 5 + A e^{-x} + B x e^{-x}$

$y(0) = 0 \qquad -5 + A + \quad = 0 \qquad A = 5$

$y(1) = -3 \qquad -3 + A e^{-1} + B e^{-1} = -3 \qquad A + B = 0$

$B = -A = -5$

Løsningen til randproblemet er: $y(x) = \underline{2x - 5 + 5e^{-x}(1 - x)}$

Generelt: $y'' + py' + qy = P(x)$ polynom av grad $n$

5

$q \neq 0$ Vi kan finne en partikulær løsning som er et polynom av grad $n$.

($q=0$, $p \neq 0$ : polynom av grad $n+1$ ...)

Eksempel $y'' + py' + qy = e^{ax}$ $(a \in \mathbb{C})$

Røttene til $r^2 + pr + q = 0$ er $r_1, r_2$

Hvis $a \neq r_1$ og $r_2$, da er det en partikulær løsning på formen $k \cdot e^{ax}$

setter inn $k \cdot e^{ax}$: $k(\underbrace{a^2 + pa + q}_{\neq 0 \text{ fra antakelsene}})e^{ax} = e^{ax}$

$$k = \frac{1}{a^2 + pa + q}$$

Hvis $r_1 \neq r_2$, og $a$ er lik $r_1$ eller $r_2$, da er det en partikulær løsning på formen $k x e^{ax}$

Hvis $r_1 = r_2 = a$, da er det en partikulær løsning på formen $x^2 e^{ax}$.

Eksempel

6 $$y'' + 3y' + 2y = \sin(x)$$

Homogene løsninger. Anta $y = e^{rx}$

$$(r^2+3r+2)e^{rx} = 0$$

$$(r+2)(r+1) = 0 \qquad r = -1, -2$$

$$y_h = Ae^{-x} + Be^{-2x}$$

Partikulær løsning

(løsning på denne formen)

Forventer $y_p = D\sin(x) + E\cos(x)$

$$y_p' = D\cos x - E\sin x, \qquad y_p'' = -D\sin x - E\cos x = -y_p$$

setter inn:

$$-y_p + 3y_p' + 2y_p = 3D\cos x - 3E\sin x$$
$$D\sin x + E\cos x$$
$$= \sin x$$

$$(3D+E)\cos x = 0\cdot\cos x \qquad E = -3D$$
$$(D-3E)\sin x = 1\cdot\sin x$$

$$D - 3(-3D) = 1$$
$$10\cdot D = 1 \qquad D = \frac{1}{10} \text{ og } E = \frac{-3}{10}$$

$$y_p = \frac{1}{10}(-3\cos x + \sin x)$$

Løsningene er: $y(x) = \dfrac{-3\cos x + \sin x}{10} + Ae^{-x} + Be^{-2x}$

(7) Harmonisk svingning med Resonanse

$$y'' + 4y = 0$$

$$y = A\sin(2x) + B\cos(2x)$$

$$y'' + 4y = \sin(2x)$$

(samme periode ...)

Partikulær løsning :

Prøver med $y = x\sin(2x)$

$$y' = \sin 2x + x(2\cos(2x))$$

$$y'' = 2\cdot(2\cdot\cos(2x)) + x(-4\,\cancel{\cos}\,\sin(2x))$$

$$y'' + 4y = 4\cos(2x)$$

Forsøker en gang til med :

$$y = x\cos(2x)$$

$$y' = \cos 2x + x(-2\sin(2x))$$

$$y'' = \underline{-4\sin(2x)} + x(-4\cos(2x))$$

En partikulær løsning er :

$$\underline{\underline{y_p = \frac{-x\cdot\cos(2x)}{4}}}$$