12.11.2015

Taylor Polynom

Hvis dere ønsker ekstra hjelp: august.johansson@hioa.no

(1)

Taylor polynomet til $f(x)$ av orden n om $x=a$

er $T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2}(x-a)^2$

$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{T_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}} + \cdots$$

setter inn for x^2 i polynomet ovenfor

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + - \cdots$$

(mindre arbeid enn å bruke definisjon av $T_n(x)$)

Vi kan benytte Taylor rekke til å estimere (bestemte) integral.

$$\int_0^y \sin(x^2)\,dx \sim \int_0^y x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \frac{x^{14}}{5040}\,dx$$

$$= \frac{y^3}{3} - \frac{y^7}{6\cdot 7} + \frac{y^{11}}{11\cdot 120} - \frac{y^{15}}{15\cdot 5040}$$

$$\int_0^1 \sin(x^2)\,dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{6\cdot 7} + \frac{1}{11\cdot 120} - \frac{1}{15\cdot 5040}$$

Restledd til Taylor polynom

(2)

$$f(x) = \underbrace{T_n(x)}_{\text{Taylor polynom}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{restledd}}$$

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x)$$

Resultat: $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

for en c mellom a og x.

Forutsetningene er at $f(x)$ er minst $n+1$ ganger kontinuerlig deriverbar (på et område som har med alle verdier punkt mellom a og x)

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{|(x-a)^{n+1}|}{(n+1)!} \left(\max_{y \text{ mellom } x \text{ og } c} f^{(n+1)}(y) \right)$$

Eksempel: $f(x) = \sin x$

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1) \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)$$

$$R_{2n+2}(x) = (\sin c)^{(2n+3)} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \left| \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \right|$$

For alle n er $\left(|\sin(c)^{(2n+3)}| \leq 1 \right)$

c mellom 0 og x.

Stirlings formel: $$n! \sim \sqrt{2\pi \cdot n}\, \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Så $$\frac{x^n}{n!} \sim \frac{x^n}{(n/e)^n} = \left(\frac{x}{n/e}\right)^n.$$

liten for $|x| < \frac{n}{e}$ stor for $|x| > \frac{n}{e}$.

Dette kan benyttes til å lage en sinus-kalkulator.

(3) Det er tilstrekkelig å se på vinkler mellom 0 og $\frac{\pi}{2}$ (90°.)

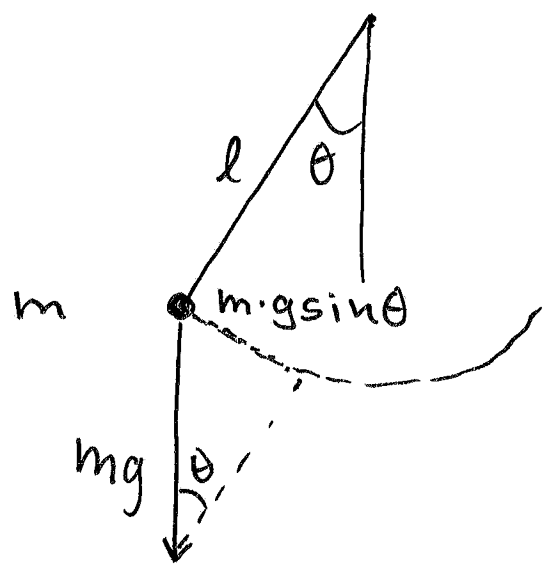
($0, \frac{\pi}{4}$ hvis både sin og cos. beregnes ...).

Nøyaktigheten ved bruk at $T_{2n+1}(x)$ er bedre enn : $\left(\frac{\pi/2}{(2n+3)/e}\right)^{2n+3}$.

$n=8$: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ $\qquad |R_{2n+2}(x)| < 5 \cdot 10^{-13}$.

Eksempel (linear tilnærming i modelering)

Pendel



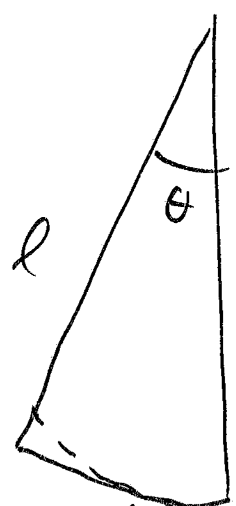
Newtons 2. lov

$$m \cdot \underbrace{l \cdot \theta''}_{\text{aksellerasjonen}} = -mg\sin\theta$$

fart og aksellerasjon langs buen :

$(l\theta)' = l \cdot \theta'$

og $(l\theta)'' = l \cdot \theta''$



buelengde $l \cdot \theta$

(4)

$$\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - + \cdots$$

Når vinkelutslagene er små er

$$\sin\theta \sim \theta$$

En tilnærming av modellen ovenfor er:

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad (\theta \text{ liten})$$

Løsningene er på formen

$$\theta(t) = A\sin\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,t\right) + B\cos\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,t\right)$$

$$\left(= C\cdot\sin\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,(t-t_0)\right)\right)$$

Periode T: $\quad T\cdot\sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi \quad$ (neste side) Detaljer

$$\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Anta utslaget til pendelen er θ_0
(svinger mellom $-\theta_0$ og θ_0)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \cdots\right)$$

Hvis $\theta_0 = 60° = \pi/3$ rad da er $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,(1.07)$

7% større enn $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$!

(5)

$$\theta'' + q\theta = 0 \qquad \left(\begin{matrix} q = \sqrt{\tfrac{g}{\ell}} \\ y = \theta \end{matrix} \right)$$

$$y'' + qy = 0 \qquad q > 0$$

anta $\quad y(x) = e^{rx} \qquad y' = r \cdot y$

$$y'' = r^2 \cdot y$$

setter inn: $\quad (r^2 + q)\,y = 0$

Løsning hvis $\quad r^2 = -q$

$$r = i\sqrt{q} \qquad r = -i\sqrt{q}$$

$$y(x) = Ae^{i\sqrt{q}x} + Be^{-i\sqrt{q}x}$$

Eulers formel

$$= A\left(\cos(\sqrt{q}x) + i\sin(\sqrt{q}x)\right) + B\left(\cos(\sqrt{q}x) - i\sin(\sqrt{q}x)\right)$$

$$= \underbrace{(A+B)}\cos(\sqrt{q}x) + i(A-B)\sin(\sqrt{q}x).$$

$$C \cdot \cos(\sqrt{q}x) + D \cdot \sin(\sqrt{q}x)$$

$$C = A + B \qquad \text{hvis } B = \overline{A} : \qquad C = 2\mathrm{Re}(A)$$

$$D = i(A - B) \qquad\qquad D = -2\mathrm{Im}(A).$$

så $\quad A = (C - iD)/2$

$$B = (C + iD)/2$$