19.03.2012

(1) I morgen går vi gjennom eksamensoppgave juni 2009 (# 1, 2)

Torsdag eks. oppg. juni 2011 ?

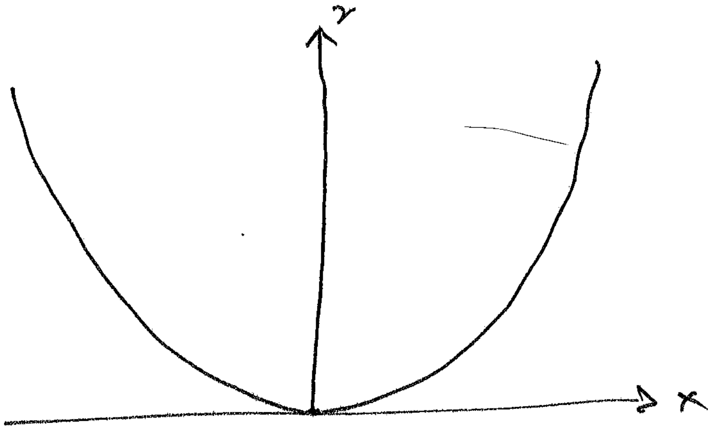
jevne og odde funksjon

Anta $f(x)$ har en symmetrisk definisjonsmengde ($x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$).

f er symmetrisk om y-aksen hvis

$f(-x) = f(x)$ jevn funksjon

= grafen til $f(x)$ speiler seg om y-aksen.



Eksempler: x^2 $((-x)^2 = x^2)$

k konstant

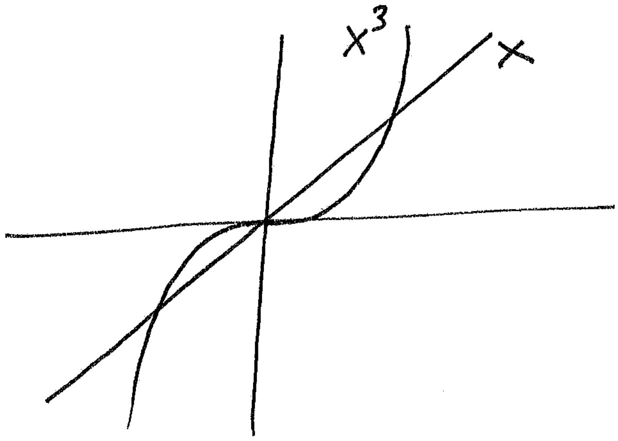
$\cos x$ $(\cos(-x) = \cos x)$

x^n n jevnt tall (partall, delelig med 2)

② f er symmetrisk om origo hvis

$f(-x) = -f(x)$ <u>odde funksjon</u>

"grafen til $f(x)$ speiler seg om origo"



Eksempler x^3 $((-x)^3 = -x^3)$

Konstant: k er en odde funksjon bare hvis $k = 0$

$\sin x$ $(\sin(-x) = -\sin x)$

x^n odde funksjon hvis n er et oddetall.

$1 + 2x + x^2$ er hverken en odde eller jevn funksjon

$$1 + 2x + x^2 = \underbrace{(1 + x^2)}_{\text{jevn}} + \underbrace{(2x)}_{\text{odde}}.$$

$$\underbrace{\sin x}_{\text{odde}} + \underbrace{\cos x}_{\text{jevn}}$$

Kan alle funksjoner (med symmetrisk definisjons-mengde) skrives som en sum av en jevn og en odde funksjon? Ja

3 $f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{jevn funksjon}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{odde funksjon}}$

Hvis $f(x)$ er både en jevn og en odde funksjon så er $f(x) = 0$ for alle x-verdier.
Derfor er det bare en måte å skrive $f(x)$ som summen av en jevn og en odde funksjon.

Dekomponerer e^x som summen av en jevn og en odde funksjon

$$e^x = \underset{\text{jevn}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} + \underset{\text{odde}}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

$$\underset{\text{hyperbolsk cosinus}}{\cosh(x)} + \underset{\text{hyperbolsk sinus.}}{\sinh(x)}$$

$$\tanh = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

4

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$$

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$$

$$(\cosh x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$(\sinh x)^2 = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$(\cosh x)^2 + (\sinh^{\cancel{2}} x)^2 = \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4}$$

$$= \cosh(2x)$$

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \underline{1}$$

---

a konstant.

$$\frac{d}{dx}\cosh(ax) = \frac{d\cosh(ax)}{d(ax)} \cdot \frac{d(ax)}{dx}$$

$$= a \cdot \sinh(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)$$

$$= \frac{(\sinh x)' \cosh x - (\sinh x)(\cosh x)'}{(\cosh x)^2}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \underline{1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}}.$$

Hvis $f(x)$ er en odde funksjon da er

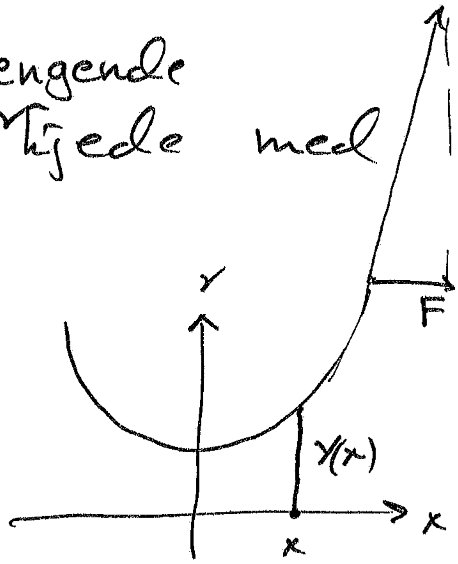
oppg. $f'(x)$ en jevn funksjon.

Hvis $f(x)$ er en jevn funksjon da er

(5) $f'(x)$ en odde funksjon

Eksempel

Beskriv "kurven" et hengende kjede med jevn massetetthet.



massetetthet ρ

gravitasjonskonstant g

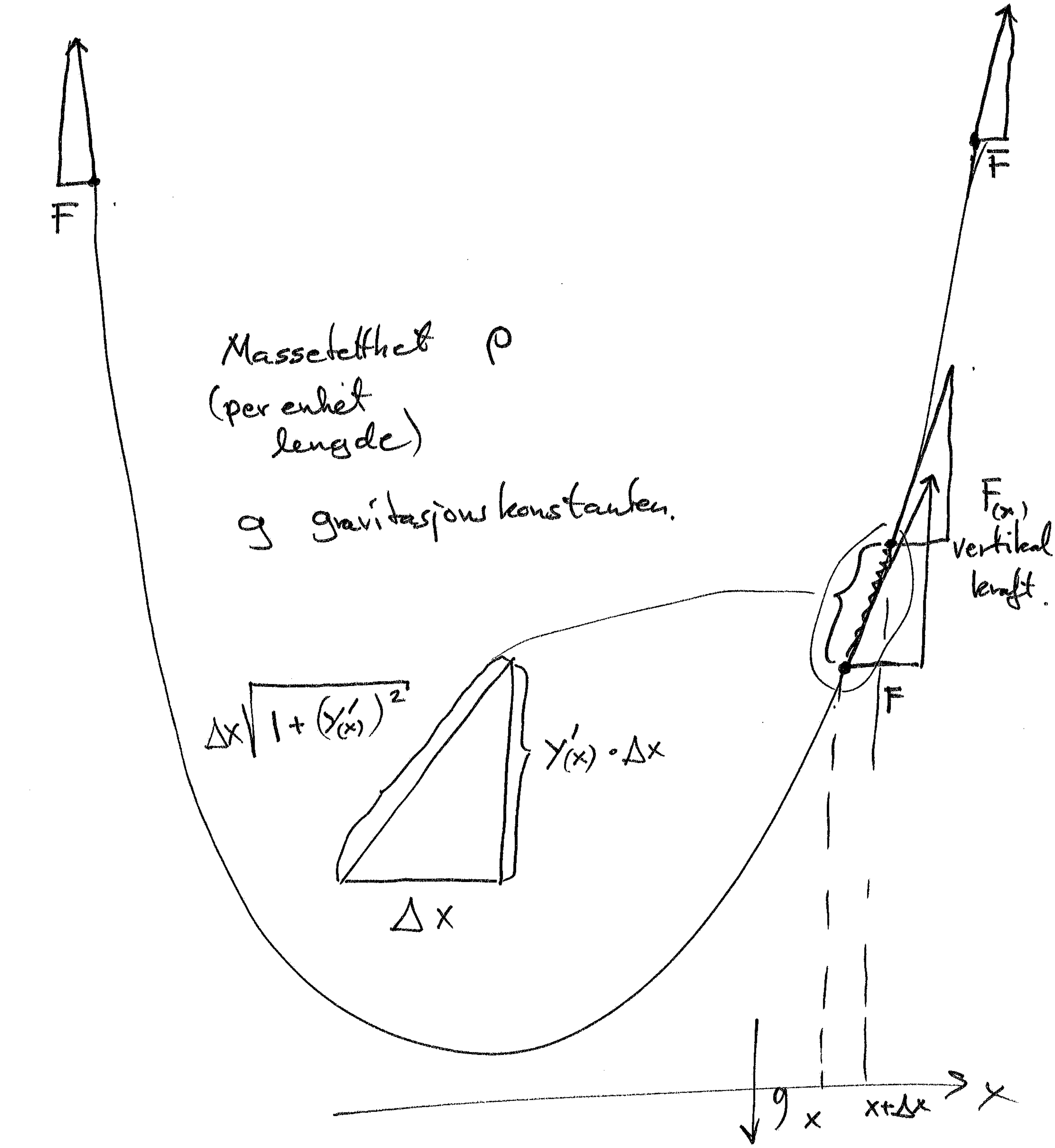
horisontal kraftkomponent F

$$Y(x) = \frac{1}{a}\cosh\big(a(x-b)\big) + c$$

hvor b og c er konstanter

(som forflytter kurven langs x og Y-aksene)

og $$a = \frac{g\rho}{F}.$$



$$y'(x) = \frac{F(x)}{F}$$

$$F(x+\Delta x) - F(x) \cong g\rho \cdot \sqrt{1+(y'(x))^2}\,\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y'(x+\Delta x) - y'(x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{F\,\Delta x} = \frac{g\rho}{F}\sqrt{1+(y'(x))^2}\,\frac{\Delta x}{\Delta x}$$

(7)

$$\boxed{y''(x) = \frac{g\rho}{F}\sqrt{1+(y'(x))^2}}$$

ikke-linear differensial likning.

$$y(x) = \frac{1}{a}\cosh(ax) \quad + c$$

$$y'(x) = \frac{1}{a}\sinh(ax)\cdot a = \sinh(ax).$$

$$y''(x) = a\cdot\cosh(ax).$$

$$\sqrt{1+(y'(x))^2} = \sqrt{1+\sinh^2(ax)}$$

$$= \sqrt{\cosh^2(ax)}$$

$$= \cosh(ax) \quad (\text{siden} \geq 1)$$

Så $y'' = \frac{g\rho}{F}\sqrt{1+(y'(x))^2}$

hvis $\underline{a = \frac{g\rho}{F}}$.

Et hengende kjede er beskrevet ved $\underline{y(x) = \frac{1}{a}\cosh(ax) + c}$.

hvor $a = \frac{g\rho}{F}$ og c er en konstant